PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 15, 2020**.

4531. *Proposed by Leonard Giugiuc and Dan Stefan Marinescu.*

Let a, b and c be positive real numbers and let x, y and z be real numbers. Suppose that $a + b + c = 2$ and $xa + yb + zc = 1$. Prove that

$$x + y + z - (xy + yz + zx) \geq \frac{3}{4}.$$

4532. *Proposed by Marius Stănean.*

Let ABC be a triangle with circumcircle Γ and let M, N, P be points on the sides BC, CA, AB, respectively. Let M', N', P' be the intersections of AM, BN, CP with Γ different from the vertices of the triangle. Prove that

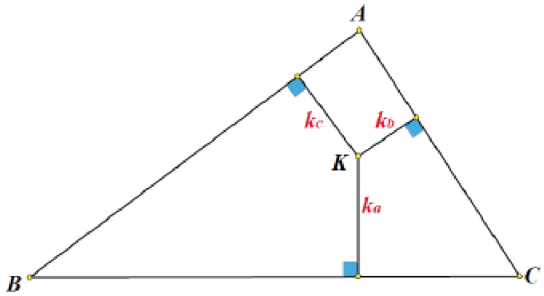
$$MM' \cdot NN' \cdot PP' \leq \frac{R^2 r}{4},$$

where R and r are the circumradius and the inradius of triangle ABC.

4533. *Proposed by Leonard Giugiuc and Kadir Altintas.*

Let K be the symmedian point of ABC. Let k_a, k_b and k_c be the lengths of the altitudes from K to the sides BC, AC and AB, respectively. If r is the inradius and s is the semiperimeter, prove that

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{3}{s}\right)^2 \geq \frac{2}{k_a^2 + k_b^2 + k_c^2}.$$



Copyright © Canadian Mathematical Society, 2020

4534. *Proposed by Michel Bataille.*

For $n \in \mathbb{N}$, evaluate

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k+1)!}}.$$

4535. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with orthocenter H, and let E be the reflection of H in the midpoint D of side BC. If the perpendicular to DE at H intersects AB at X and AC at Y, prove that $HX \cdot EC + YC \cdot HE = EX \cdot BE$.

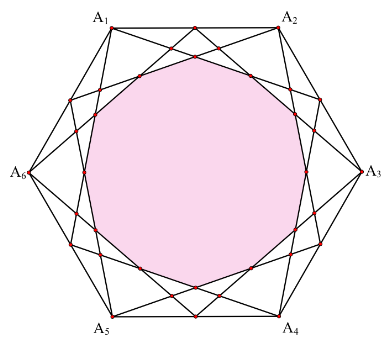
4536. *Proposed by Leonard Giugiuc and Rovsan Pirkuliev.*

Let ABC be a triangle with $\angle ABC = 60°$. Consider a point M on the side AC. Find the angles of the triangle, given that

$$\sqrt{3}BM = AC + \max\{AM, MC\}.$$

4537. *Proposed by Arsalan Wares.*

Let A be a regular hexagon with vertices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 and A_6. The six midpoints on the six sides of hexagon A are connected to the six vertices with 12 line segments as shown. The dodecagon formed by these 12 line segments has been shaded. What part of hexagon A has been shaded?



4538. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be non-negative real numbers. Prove that

$$\sum_{1\le i\le n} \sqrt{1+{a_i}^2} + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ge n-1+\sqrt{1+(\sum_{1\le i\le n} a_i)^2}.$$

When does equality occur?

4539. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle with centroid G, incircle ω, circumradius R and semiperimeter s. Show that $24R\sqrt{6} \geq 25s$ given that G lies on ω.

4540. *Proposed by Prithwijit De.*

Given a prime p and an odd natural number k, do there exist infinitely many natural numbers n such that p divides $n^k + k^n$? Justify your answer.

. . . .

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2020

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 juin 2020**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4531. *Proposé par Leonard Giugiuc et Dan Stefan Marinescu.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs et soient x, y et z des nombres réels. De plus, supposer que $a + b + c = 2$ et $xa + yb + zc = 1$. Démontrer que

$$x + y + z - (xy + yz + zx) \geq \frac{3}{4}.$$

4532. *Proposé par Marius Stănean.*

Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ et soient M, N, P des points situés sur les côtés BC, CA, AB, respectivement. Soient M', N', P' les intersections de AM, BN, CP avec Γ, mais distincts des sommets du triangle. Démontrer que

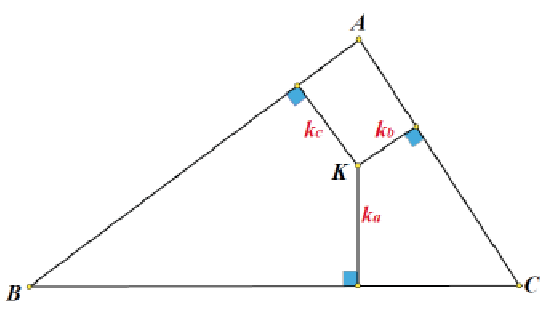
$$MM' \cdot NN' \cdot PP' \leq \frac{R^2 r}{4},$$

où R et r sont les rayons du cercle circonscrit, puis du cercle inscrit, du triangle ABC.

4533. *Proposé par Leonard Giugiuc et Kadir Altintas.*

Soit K un point symédian de ABC. Soient aussi k_a, k_b et k_c les longueurs des altitudes de K vers les côtés BC, AC et AB, respectivement. Si r est le rayon du cercle inscrit et s est le demi périmètre, démontrer que

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{3}{s}\right)^2 \geq \frac{2}{k_a^2 + k_b^2 + k_c^2}.$$



4534. *Proposé par Michel Bataille.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, évaluer

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k+1)!}}.$$

4535. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H et soit E la réflexion de H par rapport au mi point D du côté BC. Si la perpendiculaire vers DE au point H intersecte AB en X et AC en Y, démontrer que $HX \cdot EC + YC \cdot HE = EX \cdot BE$.

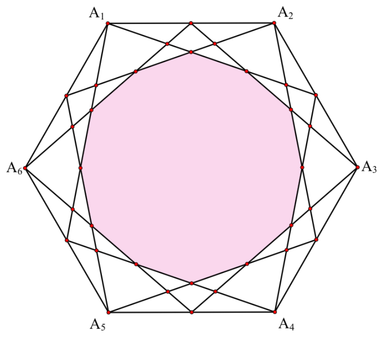
4536. *Proposé par Leonard Giugiuc et Rovsan Pirkuliev.*

Soit ABC un triangle tel que $\angle ABC = 60°$ et soit M un point sur le côté AC. Déterminer les angles du triangle, étant donné que

$$\sqrt{3}BM = AC + \max\{AM, MC\}.$$

4537. *Proposé par Arsalan Wares.*

Soit A un hexagone régulier de sommets A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6. Les six mi points des six côtés de l'hexagone sont reliés aux six sommets, à l'aide de 12 segments, tels qu'indiqués ci-bas, où le dodécagone formé par ces 12 segments est coloré. Quelle fraction de l'hexagone A est ainsi colorée ?



4538. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels non négatifs. Démontrer que

$$\sum_{1\le i\le n} \sqrt{1+{a_i}^2} + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ge n-1+\sqrt{1+(\sum_{1\le i\le n} a_i)^2}.$$

Quand est-ce que l'égalité tient ?

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2020

4539. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle de centroïde G, de cercle inscrit ω, de rayon de cercle circonscrit R et de demi périmètre s. Démontrer que $24R\sqrt{6} \geq 25s$, supposant que G se situe sur ω.

4540. *Proposé par Prithwijit De.*

À partir d'un nombre premier p et un entier naturel impair k, existe-t-il un nombre infini de nombres naturels n tels que p divise $n^k + k^n$? Justifier votre réponse.