OLYMPIAD CORNER

No. 382

The problems in this section appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 15, 2020**.

OC476. Let x be a real number such that both sums $S = \sin 64x + \sin 65x$ and $C = \cos 64x + \cos 65x$ are rational numbers. Prove that in one of these sums, both terms are rational.

OC477. Let $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(a) Prove that $(|z+1| - \sqrt{2})(|z-1| - \sqrt{2}) \leq 0$ $\forall z \in A$.

(b) Prove that for any $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in A$, there is a choice of signs "$\pm$" so that

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17.$$

OC478. Consider two noncommuting matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Knowing that $A^3 = B^3$, prove that A^n and B^n have the same trace for any nonzero natural number n.

(b) Give an example of two noncommuting matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ such that for any nonzero $n \in \mathbb{N}$, $A^n \neq B^n$, and A^n and B^n have different trace.

OC479. We say that the function $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}$ has the property $\mathcal{P}$ if

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*.$$

(a) Prove that there do not exist injective functions with property $\mathcal{P}$.

(b) Do there exist surjective functions with property $\mathcal{P}$?

OC480. In the plane, there are points C and D on the same region with respect to the line defined by the segment AB so that the circumcircles of triangles ABC and ABD are the same. Let E be the incenter of triangle ABC, let F be the incenter of triangle ABD and let G be the midpoint of the arc AB not containing the points C and D. Prove that points A, B, E, F are on a circle with center G.

. . . .

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 juin 2020**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

OC476. Soit x un nombre réel tel que les deux sommes $S = \sin 64x + \sin 65x$ et $C = \cos 64x + \cos 65x$ sont rationnelles. Démontrer que dans une des sommes, les deux termes sont rationnels.

OC477. Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(a) Démontrer que $(|z+1| - \sqrt{2})(|z-1| - \sqrt{2}) \leq 0 \ \forall z \in A$.

(b) Démontrer que pour tout $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in A$, il existe un choix de signes "$\pm$" tels que

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17.$$

OC478. Soient deux matrices qui ne commutent pas, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Si $A^3 = B^3$, démontrer que A^n et B^n ont la même trace $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

(b) Donner une exemple de deux matrices qui ne commutent pas, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout non nul $n \in \mathbb{N}$, $A^n \neq B^n$, puis A^n et B^n sont de différentes traces.

OC479. La fonction $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}$ possède la propriété $\mathcal{P}$ si

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*.$$

(a) Démontrer qu'il n'existe aucune fonction injective possédant la propriété $\mathcal{P}$.

(b) Des fonctions surjectives avec la propriété $\mathcal{P}$ existent-elles?

OC480. Soient C et D deux points dans le même demi plan par rapport au segment AB, de façon à ce que les cercles circonscrits des triangles ABC et ABD soient les mêmes. Soit E le centre du cercle inscrit du triangle ABC et soit F le centre du cercle inscrit du triangle ABD ; soit aussi G le mi point de l'arc AB contenant ni C ni D. Démontrer que A, B, E, F se trouvent sur un cercle de centre G.