PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 15, 2020**.

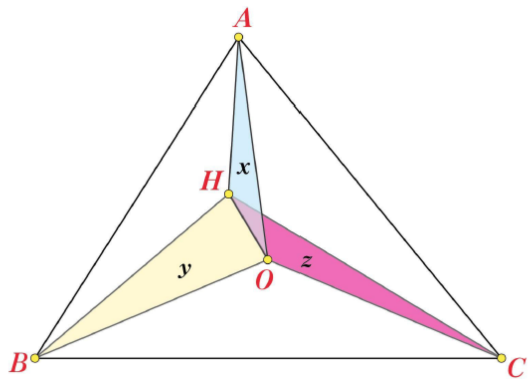
4521. *Proposed by Robert Frontczak.*

Let $m \in \mathbb{N}$, define the sequence $a_n (n \geq 0)$ by $a_0 = m$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$ and $a_n = \sqrt{a_{n-m-1} \cdot a_{n-m}}$ for $n \geq m+1$. Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4522. *Proposed by Miguel Ochoa Sanchez, Leonard Giugiuc and Kadir Altintas.*

Let ABC be an acute triangle with orthocenter H and circumcenter O. Denote Area(AHO)=x, Area(BHO)=y and Area(CHO)=z. Prove that

$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = x^4 + y^4 + z^4.$$



4523*. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let n be a natural number such that $n \geq 2$. Further, let $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, 1]$ and $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset [1, \infty)$ such that

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = n + 1.$$

Prove that

$$\frac{1}{n}(n^2 + 1) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq n + 3.$$

4524. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Let x, y, z be non-negative real numbers at most one of which is zero. Prove that if

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + xz),$$

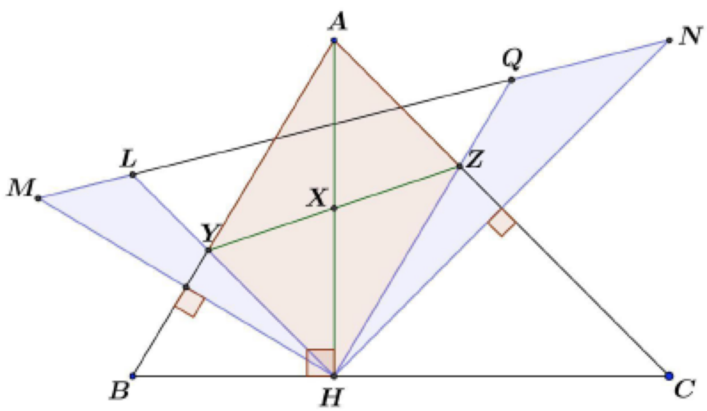
then

$$5 \leq (x + y + z)\left(\sum_{cyclic} \frac{1}{y+z}\right) \leq \frac{27}{5}$$

and determine when equality holds for either bound.

4525. *Proposed by Julio Orihuela and Leonard Giugiuc.*

Let H be the foot of the altitude from vertex A to side BC of the acute triangle ABC; let the circle with center B and radius BH meet the perpendicular from H to AB again at M, and the circle with center C and radius CH meet the perpendicular from H to AC again at N. Moreover, let the line MN meet the first circle again at L and the second circle again at Q, and finally, let Y be the point where HL intersects AB and Z the point where HQ intersects AC. Prove that $AYHZ$ is a parallelogram and $\angle MHL = \angle QHN$.



4526. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a scalene, not right-angled triangle with orthocenter H and let D, E, F be the midpoints of BC, CA, AB, respectively. Points U, V, W, respectively on the lines BC, CA, AB, are such that AU, BV, CW are perpendicular to HD, HE, HF (respectively). Prove that U, V, W are collinear.

4527. *Proposed by George Stoica.*

Let $n \geq 4$ be a positive integer. Prove that the roots of the polynomial $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, whose coefficients satisfy $|a_{n-2}|, |a_{n-1}| \leq |a_n| \leq |a_0|$, cannot be all real.

4528. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let $ABCD$ be a rectangle situated in a plane $\mathcal{P}$. Find

$$\min_{M\in\mathcal{P}}\left(\frac{MA+MC}{MB+MD}\right).$$

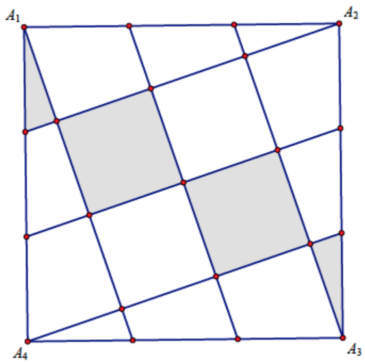
4529. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be the side-lengths of a triangle. Prove that

$$\frac{2a+b}{a+c}+\frac{2b+c}{b+a}+\frac{2c+a}{c+b}\geq\frac{9}{2}.$$

4530. *Proposed by Arsalan Wares.*

Let A be a square with vertices A_k, $k = 1, 2, 3, 4$. On each side of A, mark 2 points which divide the side into 3 equal parts. These 8 points and the vertices of A are connected to one another, dividing A into 16 disjoint regions, as shown in the figure. Determine the ratio of the area of the shaded regions to the area of A.



. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 mai 2020**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

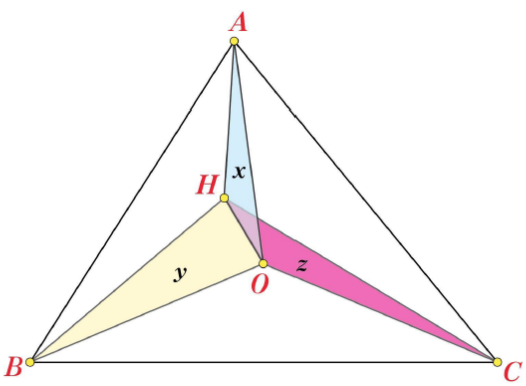
4521. *Proposeé par Robert Frontczak.*

Soit $n \geq 0$ et soit la suite a_n définie par $a_0 = m, m \in \mathbb{N}$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$ et $a_n = \sqrt{a_{n-m-1} \cdot a_{n-m}}$ pour $n \geq m+1$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4522. *Proposeé par Miguel Ochoa Sanchez, Leonard Giugiuc et Kadir Altintas.*

Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H et soit O le centre de son cercle circonscrit. Dénoter Surface(AHO)=x, Surface(BHO)=y et Surface(CHO)=z. Démontrer que

$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = x^4 + y^4 + z^4.$$



4523*. *Proposeé par Leonard Giugiuc.*

Soit n un nombre naturel tel que $n \geq 2$. De plus, soient $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, 1]$ et $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset [1, \infty)$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = n + 1.$$

Démontrer que

$$\frac{1}{n}(n^2 + 1) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq n + 3.$$

4524. *Proposeé par Lorian Saceanu.*

Soient x, y, z des nombres réels non négatifs dont au plus un est zéro. Démontrer que si

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + xz),$$

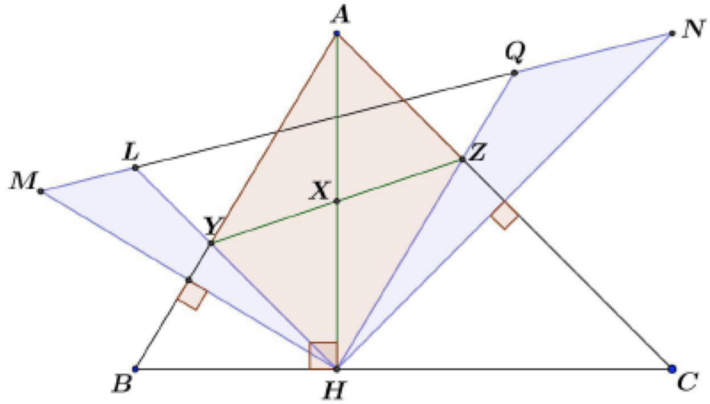
alors

$$5 \leq (x + y + z) \left(\sum_{cyclic} \frac{1}{b + c} \right) \leq \frac{27}{5}$$

et déterminer les situations où égalité tient pour l'une inégalité ou l'autre.

4525. *Proposeé par Julio Orihuela et Leonard Giugiuc.*

Soit H le pied de l'altitude émanant du sommet A vers le côté BC d'un triangle acutangle ABC. Supposons que le cercle de centre B et rayon BH rencontre la perpendiculaire de H vers AB une seconde fois à M, puis que le cercle de centre C et rayon CH rencontre la perpendiculaire de H vers AC une seconde fois à N. De plus, supposer que la ligne MN rencontre le premier cercle une seconde fois à L et le deuxième cercle une seconde fois à Q. Enfin, soient Y le point d'intersection de HL et AB, puis Z le point d'intersection de HQ et AC. Démontrer que $AYHZ$ est un parallélogramme et que $\angle MHL = \angle QHN$.



4526. *Proposeé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle scalène non rectangle d'orthocentre H et soient D, E, F les mi points de BC, CA, AB respectivement. Les points U, V, W se trouvent sur les lignes BC, CA, AC, respectivement, de façon à ce que AU, BV, CW sont perpendiculaires à HD, HE, HF, respectivement. Démontrer que U, V, W sont colinéaires.

4527. *Proposeé par George Stoica.*

Soit n un nombre naturel tel que $n \geq 4$. Démontrer que les racines du polynôme $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, dont les coefficients vérifient $|a_{n-2}|, |a_{n-1}| \leq |a_n| \leq |a_0|$, ne peuvent pas toutes être réelles.

4528. *Proposeé par Leonard Giugiuc.*

Soit $ABCD$ un rectangle dans le plan $\mathcal{P}$. Déterminer

$$\min_{M\in\mathcal{P}} \left(\frac{MA + MC}{MB + MD}\right).$$

4529. *Proposeé par George Apostolopoulos.*

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Démontrer que

$$\frac{2a+b}{a+c} + \frac{2b+c}{b+a} + \frac{2c+a}{c+b} \geq \frac{9}{2}.$$

4530. *Proposeé par Arsalan Wares.*

Soit A un carré de sommets A_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Sur chaque côté de A, on note 2 points qui divisent le côté en 3 parties égales. Ces 8 points et les sommets de A sont reliés de façon à diviser A en 16 régions, tel qu'indiqué. Déterminer le ratio de la surface ombragée par rapport à la surface de A.