OLYMPIAD CORNER

No. 381

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 15, 2020**.

OC471. There are $n > 3$ distinct natural numbers less than $(n-1)!$ written on a blackboard. For each pair of these numbers, Sergei divided the bigger number by the smaller with the remainder and wrote on his notebook the resulting incomplete quotient. For example, so if he divided 100 by 7, he got $100 = 14 \cdot 7 + 2$ and wrote 14 in the notebook. Prove that among the numbers in the notebook there are two that are equal.

OC472. Let $P(x)$ be a polynomial of degree $n \geq 2$ with nonnegative coefficients and let a, b and c be the side lengths of an acute-angled triangle. Prove that the numbers $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ and $\sqrt[n]{P(c)}$ are also the side lengths of an acute-angled triangle.

OC473. In square $ABCD$, let M be the midpoint of AB, let P be the projection of point B onto line CM and let N be the midpoint of segment CP. The angle bisector of $\angle DAN$ intersects line DP at point Q. Prove that quadrilateral $BMQN$ is a parallelogram.

OC474. Given a right triangle ABC with hypotenuse AB, let D be the foot of the altitude drawn from point C, let M and N be the intersections of the angle bisectors of $\angle ADC$ and $\angle BDC$, respectively, with sides AC and BC. Prove that

$$2 \cdot AM \cdot BN = MN^2.$$

OC475. Let $N > 1$ be an integer. Denote by x the smallest positive integer with the following property: there exists a positive integer y strictly less than $x-1$ such that x divides $N + y$. Prove that x is either p^n or $2p$, where p is a prime number and n is a positive integer.

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 mai 2020**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

OC471. Sur un tableau noir sont écrits $n > 3$ nombres naturels distincts, tous inférieurs à $(n-1)!$. Serge choisit deux de ces nombres et divise le plus gros par le plus petit, puis il inscrit la partie entière de la division dans son carnet. Par exemple, si les nombres avaient été 100 et 7, il aurait obtenu $100 = 14 \cdot 7 + 2$ et il aurait inscrit 14 dans son carnet. Il fait ceci pour chaque paire de nombres au tableau. Démontrer que parmi les nombres au carnet se retrouvent deux nombres égaux.

OC472. Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients non négatifs et soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle acutangle. Démontrer que les nombres $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ et $\sqrt[n]{P(c)}$ sont aussi les longueurs des côtés d'un triangle acutangle.

OC473. Pour un carre $ABCD$, soit M le mi point de AB, soit P la projection du point B sur la ligne CM, et soit N le mi point du segment CP. Or, la bissectrice de $\angle DAN$ intersecte la ligne DP au point Q. Démontrer que le quadrilatère $BMQN$ est un parallélogramme.

OC474. Pour un certain triangle rectangle ABC d'hypoténuse AB, soit D le pied de l'altitude émanant du point C, et soient M et N les intersections des bissectrices de $\angle ADC$ et $\angle BDC$ avec les côtés AC et BC, respectivement. Démontrer que

$$2 \cdot AM \cdot BN = MN^2.$$

OC475. Soit $N > 1$ un entier. Dénoter par x le plus petit entier positif avec la propriété suivante : il existe un entier positif y plus petit que $x - 1$ tel que x divise $N + y$. Démontrer que x est soit de la forme p^n soit de la forme $2p$, où p est un nombre premier et n est un entier positif.