PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **October 30, 2019**.

4461. *Proposed by Marian Dinca, Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let u, v and w be distinct complex numbers such that $\dfrac{w-u}{v-u}$ is not a real number. Consider a complex number $z = \alpha u + \beta v + \gamma w$, where $\alpha, \beta, \gamma > 0$ are real numbers such that $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Prove that

$$(|z-v| + |w-u|)^2 + (|z-w| + |u-v|)^2 > (|z-u| + |v-w|)^2.$$

4462. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be the lengths of the sides of triangle ABC with inradius r and circumradius R. Show that

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \leq \frac{3\sqrt{6}R}{4r}\sqrt{R(R-r)}.$$

4463. *Proposed by Max A. Alekseyev*

For all integers $n > m \geq 0$, prove that

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{n-k} (2k+1)^{2m+1} = 0.$$

4464. *Proposed by Borislav Mirchev and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle with external angle bisectors k, l and m to angles A, B and C, respectively. Projections of A on l and m are L and P, respectively. Similarly, projections of B on m and k are N and K and projections of C on k and l are Q and M. Show that the points M, N, P, Q, K and L are concyclic.

4465. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

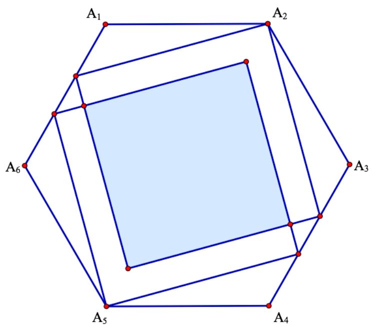
Let ABC be a triangle with centroid G and medians m_a, m_b, m_c. Rays AG,BG,CG intersect the circumcircle at A_1,B_1,C_1 respectively. Prove that

$$\frac{\text{Area}[A_1B_1C_1]}{\text{Area}[ABC]} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(8m_am_bm_c)^2}.$$

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2019

4466. *Proposed by Arsalan Wares.*

Let A be a regular hexagon with vertices $A_k, k = 1, 2, \ldots, 6$. There are two congruent overlapping squares inside A. Each of the squares shares one vertex with A and two vertices of each square lie on opposite sides of hexagon A as in the figure:



Find the exact area of the shaded region, if the length of each side of hexagon A is 2.

4467. *Proposed by Paul Bracken.*

Show that for $x > 0$,

$$\arctan x \cdot \arctan \frac{1}{x} > \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

(*Ed.*: Take a look at the problem 4327.)

4468. *Proposed by Florin Stanescu.*

Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a differentiable function such that f' is continuous and $f(0) + f'(0) = f(1)$. Show that there exists $c \in (0, 1)$ such that

$$\frac{c}{2} f(c) = \int_0^c f(x) dx.$$

4469. *Proposed by Leonard Giugiuc and Dan-Stefan Marinescu.*

Let ABC be a triangle and let P be an interior point of ABC. Denote by R_a, R_b, R_c the circumradii of the triangles PBC, PCA and PAB, respectively. Prove that $R_a R_b R_c \geq PA \cdot PB \cdot PC$.

4470. *Proposed by Leonard Giugiuc and Diana Trailescu.*

Let a, b and c be three distinct complex numbers such that $|a| = |b| = |c| = 1$ and $|a + b + c| \leq 1$. Prove that $|a^2 + bc| \geq |b + c|$.

. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **30 octobre 2019**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4461. *Proposé par Marian Dinca, Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soient u, v et w des nombres complexes distincts tels que $\dfrac{w-u}{v-u}$ n'est pas un nombre réel. Considérons alors un nombre complexe $z = \alpha u + \beta v + \gamma w$, où $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sont des nombres réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Démontrer que

$$(|z-v| + |w-u|)^2 + (|z-w| + |u-v|)^2 > (|z-u| + |v-w|)^2.$$

4462. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soient a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC, où r est le rayon du cercle inscrit et R est le rayon du cercle circonscrit. Démontrer que

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \leq \frac{3\sqrt{6}R}{4r}\sqrt{R(R-r)}.$$

4463. *Proposé par Max A. Alekseyev*

Pour entiers $n > m \geq 0$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{n-k} (2k+1)^{2m+1} = 0.$$

4464. *Proposé par Borislav Mirchev et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle dont les bissectrices externes des angles A, B et C sont k, l et m respectivement. Les projections de A vers l et m sont L et P, respectivement. De façon similaire, les projections de B vers m et k sont N et K respectivement, et les projections de C vers k et l sont Q et M. Démontrer que les points M, N, P, Q, K et L sont cocycliques.

4465. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

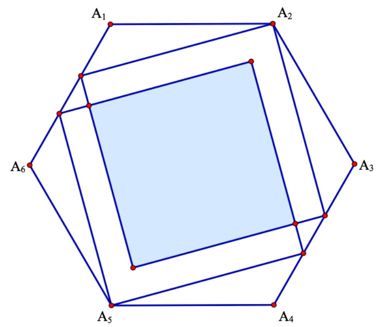
Soit ABC un triangle avec centroïde G et médianes m_a, m_b, m_c. Les rayons AG, BG, CG intersectent le cercle circonscrit en A_1,B_1,C_1 respectivement. Démontrer que

$$\frac{\text{Area}[A_1B_1C_1]}{\text{Area}[ABC]} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(8m_a m_b m_c)^2}.$$

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2019

4466. *Proposé par Arsalan Wares.*

Soit A un hexagone régulier de sommets $A_k, k = 1, 2, \ldots, 6$. Deux carrés congrus se chevauchent à l'intérieur de A. Chacun des carrés partage un sommet avec A et deux sommets de chaque carré se trouvent sur des côtés opposés de A, tel qu'indiqué ci-bas:



Déterminer la valeur exacte de la surface colorée, si les côtés de A sont de longueur 2.

4467. *Proposé par Paul Bracken.*

Démontrer que pour $x > 0$

$$\arctan x \cdot \arctan \frac{1}{x} > \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

(*Note*: Voir le probléme 4327.)

4468. *Proposé par Florin Stanescu.*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que f' est continue et que $f(0) + f'(0) = f(1)$. Démontrer qu'il existe $c \in (0,1)$ tel que

$$\frac{c}{2} f(c) = \int_0^c f(x)dx.$$

4469. *Proposé par Leonard Giugiuc et Dan-Stefan Marinescu.*

Soit ABC un triangle et soit P un point dans son intérieur. Dénotons par R_a, R_b, R_c les rayons des cercles circonscrits des triangles PBC, PCA, PAB, respectivement. Démontrer que $R_a R_b R_c \geq PA \cdot PB \cdot PC$.

4470. *Proposé par Leonard Giugiuc et Diana Trailescu.*

Soient a, b et c trois nombres complexes distincts tels que $|a| = |b| = |c| = 1$ et $|a + b + c| \leq 1$. Démontrer que $|a^2 + bc| \geq |b + c|$.