OLYMPIAD CORNER

No. 375

The problems in this section have appeared in a regional or national Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **October 30, 2019**.

OC441. Let $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ be a continuous function.

(a) Prove that there exists a natural number n_0 such that for any natural number $n > n_0$ there exists a unique real number $x_n > 0$ for which

$$n \int_0^{x_n} f(t)\, dt = 1;$$

(b) Prove that the sequence $(nx_n)_{n \geq 1}$ is convergent and find its limit.

OC442. Let $H = \{1, 2, \ldots, n\}$. Are there two disjoint subsets A and B such that $A \cup B = H$ and such that the sum of the elements in A is equal to the product of the elements in B if **(a)** $n = 2016$? **(b)** $n = 2017$?

OC443. In a triangle ABC, the foot of the altitude drawn from A is T and the angle bisector of $\angle B$ intersects side AC at D. If $\angle BDA = 45^\circ$, find $\angle DTC$.

OC444. We have n^2 empty boxes, each with a square bottom. The height and the width of each box are natural numbers in the set $\{1, 2, \ldots, n\}$. Each box differs from any other box in at least one of these two dimensions. We are allowed to insert a box into another if each dimension of the first box is smaller than the corresponding dimension of the second box and at least one of the dimensions is at least units less that the corresponding larger box dimension. In this way, we can create a sequence of boxes inserted into each other in the same orientation (i.e. the first box is inside the second, the second box is inside the third, etc.). We store each sequence of boxes on a shelf with each shelf holding one set of nested boxes. Determine the smallest number of shelves needed to store all the n^2 boxes.

OC445. There are 100 diamonds in a pile, of which 50 are genuine and 50 are fake. We invited a distinguished expert, who can recognize which diamonds are genuine. Each time we show him three diamonds, he chooses two of them and (truthfully) tells whether they are both genuine, one genuine or none genuine. Establish if we can guarantee to spot all the genuine diamonds no matter how the expert chooses the judged pair.

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **30 octobre 2019**.

La rédaction remercie Valérie Lapointe, Carignan, QC, d'avoir traduit les problèmes.

OC441. Soit $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction continue.

(a) Prouvez qu'il existe un nombre naturel n_0 tel que pour tout nombre $n > n_0$, il existe un unique nombre réel $x_n > 0$ pour lequel

$$n \int_0^{x_n} f(t)\ dt = 1;$$

(b) Prouvez que la suite $(nx_n)_{n\geq 1}$ est convergente et trouvez le résultat de sa limite.

OC442. Soit $H = \{1, 2, \ldots, n\}$. Existe-t-il deux sous-ensembles disjoints A et B tels que $A \cup B = H$ et tels que la somme des éléments dans A est égale au produit des éléments dans B si **(a)** $n = 2016$? **(b)** $n = 2017$?

OC443. Dans un triangle ABC, l'extrémité de la hauteur issue de A est T et la bissectrice de $\angle B$ intercepte le côté AC en D. Si $\angle BDA = 45°$, trouvez $\angle DTC$.

OC444. On a n^2 boîtes vides, chacune à fond carré. La hauteur et la largeur de chaque boîte est un nombre naturel de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Chaque boîte est différente d'une autre sur au moins une des deux dimensions. On peut entrer une boîte dans une autre si les deux dimensions sont plus petites et qu'au moins une des deux dimensions est au moins deux unité plus petite. On peut ainsi créer une suite de boîtes à l'intérieur d'une autre (i.e. la première boîte est à l'intérieur de la deuxième, la deuxième boîte est à l'intérieur de la troisième, etc.). On range une telle suite de boîte sur une étagère. Déterminez le plus petit nombre d'étagères nécessaires pour ranger toutes les n^2 boîtes.

OC445. Il y a 100 diamants dans une pile dans laquelle 50 sont véritables et 50 sont faux. On invite un expert qui peut reconnaître quels diamants sont véritables. À chaque fois qu'on lui montre trois diamants, il en choisit deux et dit (honnêtement) s'ils sont soit tous les deux véritables, si un seul l'est ou si aucun ne l'est. Déterminez si on peut garantir de trouver tous les diamants véritables peu importe la façon dont l'expert choisit la paire jugée.