PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **September 30, 2019**.

4451. *Proposed by Michel Bataille.*

For $n \in \mathbb{N}$ with $n \geq 2$ and $0 < a < b < 1$, let

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{(x+1)((2n-3)x^{n+1} - (2n-1)x^n + 3x - 1)}{x^2(x-1)^2}\,dx.$$

Find

$$\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{a} + \lim_{b \to 1^-} I(a,b) \right).$$

4452. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be a triangle with orthocenter H. If A', B', C' are the circumcenters of $\triangle\ HBC, \triangle\ HAC$ and $\triangle\ HAB$, respectively, and $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$, show that ABC is an equilateral triangle.

4453. *Proposed by Leonard Giugiuc and Miguel Ochoa Sanchez.*

Let ABC be a triangle with no angle larger than $\frac{2\pi}{3}$ and let T be its Fermat-Torricelli point, that is the point such that the total distance from the three vertices of ABC to T is minimum possible. Suppose BT intersects AC at D and CT intersects AB at E. Prove that if $AB + AC = 4DE$, then ABC is equilateral.

4454. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Prove the identity

$$\binom{4n}{0} - \binom{4n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{4n}{2n} = \frac{(-4)^n + (-1)^n \binom{4n}{2n}}{2}.$$

4455. *Proposed by Marian Maciocha.*

Find all integer solutions (if any) for the equation

$$(A + 3B)(5B + 7C)(9C + 11A) = 1357911.$$

4456. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Show that

$$(a+b+c)(ab+bc+ac)+3 \geq 4(a+b+c).$$

4457. *Proposed by Hung Nguyen Viet.*

Prove that for all $-\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$, $x \neq -y$, we have that

$$\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) \geq 1.$$

4458. *Proposed by Marian Cucoaneş and Marius Drăgan.*

Let a, b, c, d be the sides of a cyclic quadrilateral with circumradius R and lengths of diagonals d_1 and d_2. Prove that

$$\sum_{cyclic} \frac{a}{b+c+d-a} \geq \frac{4R}{\sqrt{d_1 d_2}}.$$

4459. *Proposed by Leonard Giugiuc and Miguel Ochoa Sanchez.*

Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. For a point P on side AB let Q be a point of the extension of AC beyond C for which the midpoint N of PQ lies on the segment BC; similarly, for a point R on side AC let S be a point of the extension of AB beyond B for which the midpoint M of RS lies on the segment BC. Prove that

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{\cos\angle RMN}{\cos\angle PNM}.$$

4460. *Proposed by Gantumur Choijilsuren and Leonard Giugiuc.*

Let $(x_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of real numbers such that $(3x_{n+1} - 2x_n)_{n\geq 1}$ is convergent. Show that $(x_n)_{n\geq 1}$ is convergent.

. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **30 septembre 2019**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4451. *Proposed by Michel Bataille.*

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ and $0 < a < b < 1$, soit

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{(x+1)((2n-3)x^{n+1} - (2n-1)x^n + 3x - 1)}{x^2(x-1)^2}\, dx.$$

Déterminer

$$\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{a} + \lim_{b \to 1^-} I(a,b) \right).$$

4452. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle avec orthocentre H. Si A', B', C' sont les centres des cercles circonscrits de $\triangle\, HBC, \triangle\, HAC$ et $\triangle\, HAB$ respectivement et si

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0},$$

démontrer que ABC est un triangle équilatéral.

4453. *Proposed by Leonard Giugiuc and Miguel Ochoa Sanchez.*

Soit ABC un triangle dont aucun angle est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$ et soit T son point Fermat-Torricelli, c'est-à-dire le point tel que la distance totale de T vers les sommets de ABC est minimale. Supposer que BT intersecte AC en D et que CT intersecte AB en E. Démontrer que si $AB + AC = 4DE$, alors ABC est équilatéral.

4454. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Démontrer l'identité

$$\binom{4n}{0} - \binom{4n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{4n}{2n} = \frac{(-4)^n + (-1)^n \binom{4n}{2n}}{2}.$$

4455. *Proposed by Marian Maciocha.*

Déterminer toute solution entière, s'il y en a, à l'équation

$$(A+3B)(5B+7C)(9C+11A) = 1357911.$$

4456. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Soient a, b, c des nombres réels tels que $abc = 1$. Démontrer que

$$(a+b+c)(ab+bc+ac)+3 \geq 4(a+b+c).$$

4457. *Proposed by Hung Nguyen Viet.*

Démontrer que pour tout x et y tels que $-\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -y$, l'inégalité suivante tient:

$$\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2 (x+y) \geq 1.$$

4458. *Proposed by Marian Cucoaneş and Marius Drăgan.*

Soient a, b, c, d les côtés d'un quadrilatère cyclique de diagonales d_1 et d_2 et dont le rayon du cercle associé est R. Démontrer que

$$\sum_{cyclic} \frac{a}{b+c+d-a} \geq \frac{4R}{\sqrt{d_1 d_2}}.$$

4459. *Proposed by Leonard Giugiuc and Miguel Ochoa Sanchez.*

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$. Pour un point P sur le côté AB, soit Q un point sur le prolongement de AC au delà de C pour lequel le mi point N de PQ se situe sur le segment BC; de façon similaire, pour un point R sur le côté AC, soit S un point sur le prolongement de AB au delà de B pour lequel le mi point M de RS se trouve sur le segment BC. Démontrer que

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{\cos \angle RMN}{\cos \angle PNM}.$$

4460. *Proposed by Gantumur Choijilsuren and Leonard Giugiuc.*

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $(3x_{n+1} - 2x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Démontrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.