OLYMPIAD CORNER

No. 374

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **September 30, 2019**.

OC436. In a non-isosceles triangle ABC, let O and I be its circumcenter and incenter, respectively. Point B', which is symmetric to point B with respect to line OI, lies inside $\angle ABI$. Prove that the tangents to the circumcircle of the triangle $BB'I$ at points B' and I intersect on the line AC.

OC437. The magician and his helper have a deck of cards. The cards all have the same back, but their faces are coloured in one of 2017 colours (there are 1000000 cards of each colour). The magician and the helper are going to show the following trick. The magician leaves the room; volunteers from the audience place $n > 1$ cards in a row on a table, all face up. The helper looks at these cards, then he turns all but one card face down (without changing their order). The magician returns, looks at the cards, points to one of the face-down cards and states its colour. What is the minimum number n such that the magician and his helper can have a strategy to do the magic trick successfully?

OC438. A teacher gives the students a task of the following kind. He informs them that he thought of a monic polynomial $P(x)$ of degree 2017 with integer coefficients. Then he tells them k integers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ and the value of the expression $P(n_1)P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. According to these data, the students should then find teacher's polynomial. Find the smallest k for which the teacher can compose such a problem so that the polynomial found by the students must necessarily coincide with the one he thought of.

OC439. Let $(G, \cdot)$ be a group and let m and n be two nonzero natural numbers that are relatively prime. Prove that if the functions $f : G \to G$, $f(x) = x^{m+1}$ and $g : G \to G$, $g(x) = x^{n+1}$ are surjective endomorphisms, then the group G is abelian.

OC440. Let $f : [a, b] \to [a, b]$ be a differentiable function with continuous and positive first derivative. Prove that there exists $c \in (a, b)$ such that

$$f(f(b)) - f(f(a)) = (f'(c))^2(b - a).$$

. . . .

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **30 septembre 2019**.

La rédaction souhaite remercier Valérie Lapointe, Carignan, QC, d'avoir traduit les problèmes.

OC436. Soit les points O et I, les centres des cercles circonscrit et inscrit du triangle non-isocèle ABC, respectivement. Le point B' qui est symétrique au point B par rapport à la droite OI est à l'intérieur de $\angle ABI$. Prouvez que les tangentes au cercle circonscrit du triangle $BB'I$ aux points B' et I s'interceptent sur le segment AC.

OC437. Un magicien et son assistant ont un jeu de cartes. Les cartes ont toutes la même face arrière, mais leur face avant sont colorées en une des 2017 couleurs (il y a 1000000 cartes de chaque couleur). Le magicien et l'assistant présentent le tour suivant. Le magicien quitte la pièce ; des volontaires de l'audience placent $n > 1$ cartes en une rangée sur une table, face avant sur le dessus. L'assistant regarde les cartes, puis retourne toutes les cartes sauf une (sans changer l'ordre). Le magicien revient, regarde les cartes, pointe une des cartes retournées et dit sa couleur. Quel est le nombre minimal n pour que le magicien et son assistant aient une stratégie pour réussir le tour ?

OC438. Un professeur donne à ses étudiants la tâche suivante. Il les informe qu'il pense à un polynôme unitaire $P(x)$ de degré 2017 dont les coefficients sont entiers. Il leur nomme ensuite k entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et la valeur d'expression $P(n_1)P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. Selon ces informations, les étudiants devraient trouver le polynôme du professeur. Trouver la plus petite valeur de k pour laquelle le professeur peut composer un tel problème de sorte que le polynôme trouvé par les étudiants soit nécessairement le même que celui auquel il a pensé.

OC439. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit m et n deux nombres naturels différents de zéro qui sont copremiers. Prouvez que si les fonctions $f : G \to G$, $f(x) = x^{m+1}$ et $g : G \to G$, $g(x) = x^{n+1}$ sont des endomorphismes surjectifs, alors le groupe G est abélien.

OC440. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction différentiable dont la dérivée première est continue et positive. Prouvez qu'il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f(f(b)) - f(f(a)) = (f'(c))^2(b - a).$$

OLYMPIAD CORNER SOLUTIONS

Statements of the problems in this section originally appear in 2018: 44(8), p. 324–325; 44(9): 370-371; 44(10): 412-413.

OC396. Prove that there are infinitely many positive integers m such that the number of odd distinct prime factors of $m(m + 3)$ is a multiple of 3.

Originally Problem 5 from the Final Round of 2017 Italy Math Olympiad.

We received no submissions for this problem.

OC397. In a triangle ABC with $\angle A = 45^\circ$, draw the median AM. The line b is symmetrical to the line AM with respect to the altitude BB_1 and the line c is symmetrical to AM with respect to the altitude CC_1. The lines b and c intersect at the point X. Prove that $AX = BC$.

Originally Problem 6 from Grade 9 competition of the 2017 Moscow Math Olympiad.

We received 3 correct submissions. We present two solutions.

Solution 1, by Oliver Geupel.

Put the triangle onto a complex plane such that the unit circle (O) is circumscribed about triangle ABC and identify each point with the corresponding complex number. By the hypothesis $\angle A = 45^\circ$, there is no loss of generality in putting $B = -(1 + i)/\sqrt{2}$ and $C = (1 - i)/\sqrt{2}$. Then,

$$M = \frac{B + C}{2} = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \qquad \bar{M} = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Let (O) intersect the lines AM, BB_1, and CC_1 for the second time at points D, E, and F, respectively. Since A and D are complex numbers of absolute value 1,