PROBLEMS

Click here to submit problems proposals as well as solutions, comments and generalizations to any problem in this section.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 15, 2019**.

4411. *Proposed by Michel Bataille.*

Let n be a positive integer. Find the largest constant C_n such that

$$\frac{(xy)^n}{z^{n+1}}+\frac{(yz)^n}{x^{n+1}}+\frac{(zx)^n}{y^{n+1}} \geq C_n\left(\max(x,y,z)\right)^{n-1}$$

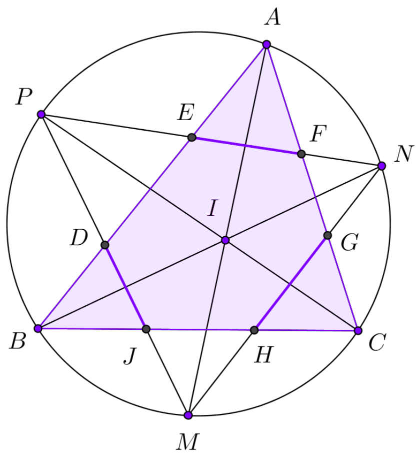
holds for all real numbers x, y, z satisfying $xyz > 0$ and $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

4412. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with incenter I. If I_a, I_b, I_c are the excenters of ABC, show that $\overrightarrow{II_a}+\overrightarrow{II_b}+\overrightarrow{II_c}=\overrightarrow{0}$ if and only if ABC is equilateral.

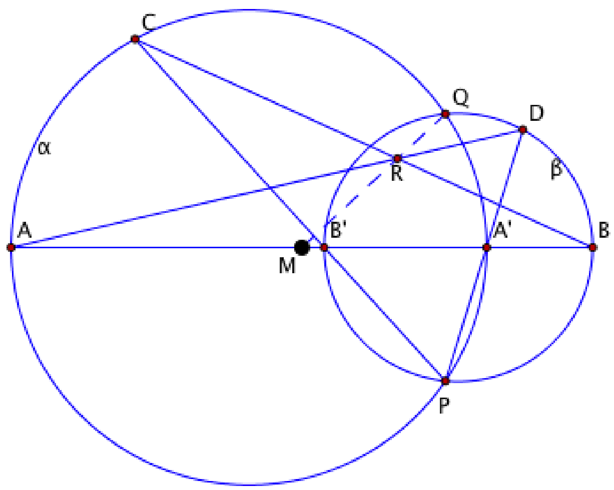
4413. *Proposed by Miguel Ochoa Sanches and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle with incenter I and circumcircle ω. The lines AI, BI, CI intersect ω a second time at M, N, P, respectively. Also suppose that NP intersects AB and AC at E and F, respectively. We define points G, H, J and D analogously (see the picture). Show that if $EF = GH = JD$, then triangle ABC is equilateral.



4414. *Proposed by Konstantin Knop.*

Let α and β be a pair of circles that intersect in points P and Q, and let the diameter AA' of α lie on the same line as the diameter BB' of β such that the end points lie in the order $AB'A'B$. Suppose that PB' intersects α again at the point C, that PA' intersects β again at D, and that the lines AD and BC intersect at R. Prove that the line QR intersects the segment AB at its midpoint.



4415. *Proposed by Titu Zvonaru.*

Let ABC be an acute-angled triangle with $AB < AC$, where AD is the altitude from A, O is the circumcenter and M and N are the midpoints of the sides BC and AB, respectively. The line AO intersects the line MN at X. Prove that DX is parallel to OC.

4416. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let ABC be an acute triangle with orthocentre H. Denote by r_a, r_b, r_c the exradii opposite the vertices A, B, C, and by r_1, r_2, r_3 the inradii of triangles BHC, CHA, AHB, respectively. Prove that

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_a + r_b + r_c = a + b + c.$$

4417. *Proposed by Dan Stefan Marinescu, Daniel Sitaru and Leonard Giugiuc.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $abc \geq 1$. Further, let x, y and z be real numbers such that $xy + yz + zz \geq 3$. Prove that

$$(y^2 + z^2)a + (z^2 + x^2)b + (x^2 + y^2)c \geq 6.$$

4418. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Consider a convex cyclic quadrilateral with sides a, b, c, d and area S. Prove that

$$\frac{(a+b)^5}{c+d} + \frac{(b+c)^5}{d+a} + \frac{(c+d)^5}{a+b} + \frac{(d+a)^5}{b+c} \geq 64S^2.$$

4419. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle with $\angle BAC = 90°$. Let D on the hypotenuse BC produced beyond C be such that $CD = CB+BA$. The internal bisector of $\angle ABC$ intersects the line through the midpoints of AB and AC at T. Prove that $\angle TCA = \angle CDA$.

4420. *Proposed by Leonard Giugiuc and Marian Dinca.*

Let $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$, $n \geq 10$ be a regular polygon inscribed in a circle of radius r centered at O. Consider the closed disks $\omega(A_k), k = 0, \ldots, n-1$ centered at A_k of radius r. Prove that

$$\cap_{k=0}^{n-1} \omega(A_k) = \{O\}.$$

. . . .

Cliquez ici afin de proposer de nouveaux problèmes, de même que pour offrir des solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposś dans cette section.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 mai 2019**.

La rédaction souhaite remercier Valérie Lapointe, Carignan, QC, d'avoir traduit les problèmes.

4411. *Proposé par Michel Bataille.*
Soit n un entier positif. Trouver la plus grande constante possible C_n telle que

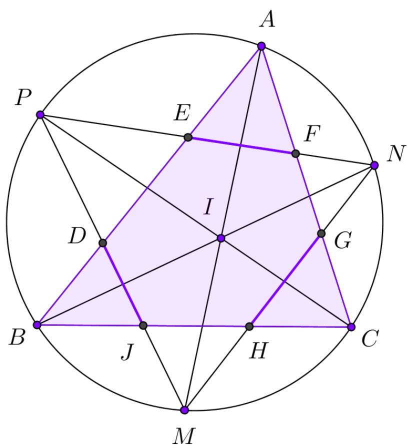
$$\frac{(xy)^n}{z^{n+1}} + \frac{(yz)^n}{x^{n+1}} + \frac{(zx)^n}{y^{n+1}} \geq C_n \left(\max(x, y, z)\right)^{n-1}$$

soit vraie pour tous les nombres réels x, y, z satisfaisant à $xyz > 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

4412. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*
Soit ABC un triangle acutangle de centre inscrit I. Si I_a, I_b, I_c sont les centres des cercles exinscrits de ABC, montrer que $\overrightarrow{II_a} + \overrightarrow{II_b} + \overrightarrow{II_c} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si ABC est un triangle équilatéral.

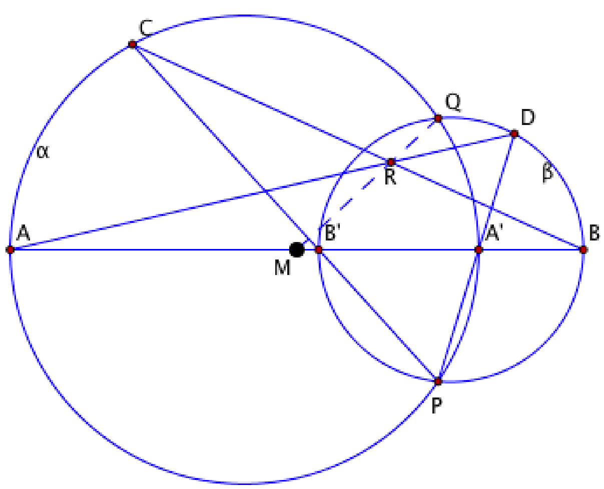
4413. *Proposé par Miguel Ochoa Sanches et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle de centre inscrit I et le cercle circonscrit ω. Les segments AI, BI, CI interceptent ω une deuxième fois aux points M, N, P, respectivement. Supposons aussi que NP intercepte AB et AC aux points E et F respectivement. Similairement, les points G, H, J et D sont définis (voir l'image ci-dessous). Montrer que si $EF = GH = JD$, alors le triangle ABC est équilatéral.



4414. *Proposé par Konstantin Knop.*

Soient α et β deux cercles, intersectant aux points P et Q. Supposer qu'un diamètre AA' de α se trouve sur la même ligne qu'un diamètre BB' de β, de façon à ce que les extrémités de ces diamètres se retrouvent dans l'ordre $AB'A'B$. De plus, supposer que PB' intersecte α de nouveau au point C, que PA' intersecte β de nouveau au point D, puis que les lignes AD et BC intersectent au point R. Démontrer que la ligne QR intersecte le segment AB à son mi point.



4415. *Proposé par Titu Zvonaru.*
Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB < AC$ où AD est la hauteur issue de A, O est le centre circonscrit et M et N sont les points milieu des côtés BC et AB respectivement. Le segment AO intercepte le segment MN au point X. Montrer que DX est parallèle à OC.

4416. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H. Soit r_a, r_b, r_c les rayons des cercles exinscrits opposés aux sommets A, B, C, et soit r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles inscrits des triangles BHC, CHA, AHB, respectivement. Montrer que

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_a + r_b + r_c = a + b + c.$$

4417. *Proposé par Dan Stefan Marinescu, Daniel Sitaru et Leonard Giugiuc.*
Soit a, b et c des nombres réels positifs tels que $abc \geq 1$. De plus, soit x, y et z des nombres réels tels que $xy + yz + xz \geq 3$. Montrer que

$$(y^2 + z^2)a + (x^2 + z^2)b + (x^2 + y^2)c \geq 6.$$

4418. *Proposé par Daniel Sitaru.*
Soit un quadrilatère convexe cyclique de côtés a, b, c, d et d'aire S. Montrer que

$$\frac{(a+b)^5}{c+d} + \frac{(b+c)^5}{d+a} + \frac{(c+d)^5}{a+b} + \frac{(d+a)^5}{b+c} \geq 64S^2.$$

4419. *Proposé par Michel Bataille.*
Soit ABC un triangle où $\angle BAC = 90°$. Soit le point D sur le prolongement de l'hypoténuse BC tel que $CD = CB + BA$. La bissectrice interne de $\angle ABC$ intercepte le segment par les points milieu de AB et AC au point T. Montrer que $\angle TCA = \angle CDA$.

4420. *Proposé par Leonard Giugiuc et Marian Dinca.*
Soit $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$, $n \geq 10$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon r centré en O. Considérons les disques fermés $\omega(A_k), k = 0, \ldots, n-1$ centrés en A_k de rayon r. Montrer que

$$\cap_{k=0}^{n-1} \omega(A_k) = \{O\}.$$