OLYMPIAD CORNER

No. 370

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad.

Click here to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 15, 2019**.

OC416. Given an acute nonisosceles triangle ABC with altitudes CD, AE, BF. Points E' and F' are symmetrical to E and F with respect to points A and B, respectively. Take a point C_1 on the ray $\overrightarrow{CD}$ such that $DC_1 = 3CD$. Prove that $\angle E'C_1F' = \angle ACB$.

OC417. Point M is the midpoint of side BC of a triangle ABC in which $AB = AC$. Point D is the orthogonal projection of M onto side AB. Circle ω is inscribed in triangle ACD and tangent to segments AD and AC at K and L, respectively. Lines tangent to ω which pass through M intersect line KL at X and Y, where points X, K, L and Y lie on KL in this order. Prove that points M, D, X and Y are concyclic.

OC418. Three sequences $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, $(c_0, c_1, \ldots, c_{2n})$ of nonnegative real numbers are given such that for all $0 \leq i, j \leq n$ we have $a_i b_j \leq (c_{i+j})^2$. Prove that

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j \leq \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2 .$$

OC419. Prove that there exist infinitely many positive integers m such that there exist m consecutive perfect squares with sum m^3. Determine one solution with $m > 1$.

OC420. General Tilly and the Duke of Wallenstein play "Divide and rule!" (Divide et impera!). To this end, they arrange N tin soldiers in M companies and command them by turns. Both of them must give a command and execute it in their turn.

Only two commands are possible: The command "Divide!" chooses one company and divides it into two companies, where the commander is free to choose their size, the only condition being that both companies must contain at least one tin soldier. On the other hand, the command “Rule!” removes exactly one tin soldier from each company.

The game is lost if in your turn you can’t give a command without losing a company. Wallenstein starts to command.

(a) Can he force Tilly to lose if they start with 7 companies of 7 tin soldiers each?

(b) Who loses if they start with $M \geq 1$ companies consisting of $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$, $\ldots$, $n_M \geq 1$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_M = N)$ tin soldiers?

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d’une olympiade mathématique régionale ou nationale.

Cliquez ici afin de soumettre vos solutions, commentaires ou généralisations aux problèmes proposés dans cette section.

Pour faciliter l’examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **15 mai 2019***.*

La rédaction souhaite remercier Valérie Lapointe, Carignan, QC, d’avoir traduit les problèmes.

OC416. Soit un triangle acutangle non isocèle ABC dont les hauteurs sont CD, AE et BF. E' et F' sont symétriques à E et F par rapport aux points A et B respectivement. On prend un point C_1 sur le segment CD tel que $DC_1 = 3CD$. Montrer que $\angle E'C_1F' = \angle ACB$.

OC417. Le point M est le milieu du côté BC d’un triangle ABC où $AB = AC$. Le point D correspond à la projection orthogonale de M sur le côté AB. Le cercle ω est inscrit dans le triangle ACD et est tangent aux segments AD et AC aux points K et L respectivement. Les droites tangentes à ω qui passent par M interceptent le segment KL en X et Y, où les points X, K, L et Y sont sur le segment KL dans cet ordre. Montrer que les points M, D, X et Y sont concycliques.

OC418. Soit trois suites $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, $(c_0, c_1, \ldots, c_{2n})$ de nombres réels non négatifs telles que pour toutes les suites $0 \leq i, j \leq n$ on a $a_i b_j \leq (c_{i+j})^2$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j \leq \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2 .$$

OC419. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs m tels qu'il existe m carrés parfaits consécutifs dont la somme est m^3. Trouver une solution avec $m > 1$.

OC420. Le Général Tilly et le Duc de Wallenstein jouent à "diviser et régner!" Dans ce but, ils placent N soldats de plomb dans M groupes et leur donnent des commandes. Les deux doivent donner une commande et l'exécuter pendant leur tour. Seulement deux commandes sont possibles : la commande "Divise!" choisit un groupe et le divise en deux groupes où le commandant est libre de choisir la taille des groupes en autant que chaque groupe contienne au moins un soldat. La commande "Règne!" enlève exactement un soldat de plomb de chaque groupe. La partie est perdue si lors d'un tour, il n'est plus possible de donner un ordre sans perdre un groupe. C'est le Duc de Wallenstein qui débute les commandes.

(a) Peut-il faire perdre le Général Tilly s'ils commencent avec 7 groupes de 7 soldats de plomb chacun ?

(b) Qui perd s'ils commencent avec $M \geq 1$ groupes ayant $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$, $\ldots$, $n_M \geq 1$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_M = N)$ soldats de plomb ?