THE OLYMPIAD CORNER

No. 365

Anamaria Savu

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **February 1, 2019**.

The editor thanks Valérie Lapointe, Carignan, QC, for translations of the problems.

OC391. Let $x_1, x_2, x_3, \dots$ be a sequence of positive integers such that for every pair of positive integers (m, n) we have $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$. Prove that there exists a positive integer i such that $x_i \geq 2017$.

OC392. In a convex hexagon $ABCDEF$ all sides are equal and also $AD = BE = CF$. Prove that a circle can be inscribed into this hexagon.

OC393. The point O is the center of the circumcircle Ω of the acute triangle ABC. The circumcircle ω of the triangle AOC intersects the sides AB and BC again at the points E and F. Moreover, the line EF divides the area of the triangle ABC in half. Find $\angle B$.

OC394. In Chicago, there are 36 criminal gangs, some of which are at war with each other. Each gangster belongs to several gangs and every pair of gangsters belongs to a different set of gangs. It is known that no gangster is a member of two gangs that are at war with each other. Furthermore, each gang that some gangster does not belong to is at war with some gang he does belong to. What is the largest possible number of gangsters in Chicago?

OC395. Let $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ be symmetric matrices. Prove that the following statements are equivalent:

(a) $\det(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2) = 0$;

(b) for all matrices $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ it holds

$$\det(A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_kB_k) = 0.$$

OC391. Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite d'entiers positifs telle que pour chaque paire d'entiers positifs (m, n), on a $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$. Prouvez qu'il existe un entier positif i tel que $x_i \geq 2017$.

OC392. Soit un hexagone convexe $ABCDEF$ dont tous les côtés sont égaux et dont $AD = BE = CF$. Prouvez qu'un cercle peut être inscrit dans cet hexagone.

OC393. Le point O est le centre du cercle circonscrit Ω du triangle acutangle ABC. Le cercle circonscrit ω du triangle AOC intercepte les côtés AB et BC aux points E et F. De plus, le segment EF divise l'aire du triangle ABC en deux. Trouvez $\angle B$.

OC394. À Chicago, il y a 36 bandes criminelles, dont certaines sont en guerre une contre l'autre. Chaque bandit appartient à diverses bandes et chaque paire de bandits appartient à des groupes de bandes différents. Un bandit ne peut pas appartenir à deux bandes qui sont en guerre. De plus, chaque bande à laquelle un bandit n'appartient pas est en guerre avec certaines bandes auxquelles ce bandit appartient. Quel est le plus grand nombre possible de bandits à Chicago?

OC395. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$des matrices symétriques. Prouvez que les énoncés suivants sont équivalents :

(a) $\det(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2) = 0$;

(b) pour toutes matrices $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\det(A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_kB_k) = 0.$$