PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **February 1, 2019**.

The editor thanks Valérie Lapointe, Carignan, QC, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.

4361. *Proposed by Andrew Wu.*

Let ABC be a scalene triangle with circumcircle Γ, circumcenter O and incenter I. Suppose that L is the midpoint of the arc BAC of Γ. The perpendicular bisector of AI meets at X the arc AC that contains B, and at Y the arc AB that contains C. Let XL and AC meet at P; let YL and AB meet at Q. Show that the orthocenter of triangle OPQ lies on XY.

4362. *Proposed by Oai Thanh Dao and Leonard Giugiuc.*

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let F be the midpoint of CD. Consider a point E inside $ABCD$ such that $AE \cdot CE = BE \cdot DE$. The lines EF and AB intersect at G. If $\angle AED + \angle CEB = 180°$, prove that $\angle AED = \angle AGE$.

4363. *Proposed by Michel Bataille.*

Let $(a_n)_{n\geq 0}$ be the sequence defined by $a_0 > 0$ and the recursion

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + (n+1)a_n^2}.$$

Prove that the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ is convergent and find $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)$.

4364. *Proposed by George Stoica.*

Let $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a binary operation, and define $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by

$$g(a, b) = \begin{cases} a \text{ if } b = 1 \\ f(g(a, b-1), a) \text{ if } b \geq 2. \end{cases}$$

If f is associative and g is commutative, prove that $f(a, b) = a+b$ and $g(a, b) = ab$.

4365. *Proposed by Marius Drăgan and Neculai Stanciu.*

Let a and b be real numbers such that $a + b, a^4$ and b^4 are rational numbers and $a + b \neq 0$. Prove that a ad b are rational numbers.

4366. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let x_n be the base angle of a right triangle with base n and altitude 1. Find

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{k^2+k+1}.$$

4367. *Proposed by Kadir Altintas and Leonard Giugiuc.*

Let a, b and c be distinct complex numbers such that $|a| = |b| = |c| = 1$ and $|a+b+c| \leq 1$. Prove that

$$\left|\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}\right| + \left|\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}\right| + \left|\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}\right| = 1.$$

4368. *Proposed by Ovidiu Furdui and Alina Sîntămărian.*

Calculate

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[2^n \left(\zeta(n) - 1\right) - 1\right],$$

where ζ denotes the Riemann zeta function defined as $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$.

4369. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

On the sides of $\triangle\, ABC$ take points $A_1,\ A_2 \in (BC)\,,\ B_1,\ B_2 \in (AC)\,,\ C_1,\ C_2 \in (AB)$, so that $BA_1 = A_2C,\ CB_1 = B_2A,\ AC_1 = C_2B$. On $B_2C_1,\ A_1C_2,\ A_2B_1$ take $A_3,\ B_3,\ C_3$ so that $\dfrac{C_1A_3}{A_3B_2} = \dfrac{A_1B_3}{B_3C_2} = \dfrac{B_1C_3}{C_3A_2} = k$. Find all values of k for which $AA_3,\ BB_3,\ CC_3$ are concurrent lines.

4370. *Proposed by Leonard Giugiuc and Sladjan Stankovik.*

Solve the following system of equations:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 4, \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 7, \\ abc+abd+acd+bcd-abcd = \frac{15}{16}. \end{cases}$$

. . . .

4361. *Proposé par Andrew Wu.*

Soit ABC un triangle scalène et le cercle circonscrit Γ de centre O et soit le point I, le centre du cercle inscrit. Soit L le point milieu de l'arc BAC de Γ. La médiatrice du segment AI rencontre au point X l'arc AC qui contient B et rencontre au point Y l'arc AB qui contient C. Soit P, le point d'intersection de XL et AC et soit Q, le point d'intersection de YL et AB. Montrez que l'orthocentre du triangle OPQ est sur le segment XY.

4362. *Proposé par Oai Thanh Dao et Leonard Giugiuc.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit F le point milieu du segment CD. Considérez un point E dans $ABCD$ tel que $AE \cdot CE = BE \cdot DE$. Les segments EF et AB s'interceptent au point G. Si $\angle AED + \angle CEB = 180^\circ$, prouvez que $\angle AED = \angle AGE$.

4363. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $a_0 > 0$ et la récurrence

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+(n+1)a_n^2}.$$

Prouvez que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ est convergente et trouvez $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^2\right)$.

4364. *Proposé par George Stoica.*

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une opération binaire et soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie telle que

$$g(a,b) = \begin{cases} a \text{ si } b = 1 \\ f(g(a,b-1),a) \text{ si } b \geq 2. \end{cases}$$

Si f est associative et g est commutative, prouvez que $f(a,b) = a+b$ et $g(a,b) = ab$.

4365. *Proposé par Marius Drăgan et Neculai Stanciu.*

Soit a et b des nombres réels tels que $a+b, a^4$ et b^4 sont des nombres rationnels et $a+b \neq 0$. Prouvez que a et b sont des nombres rationnels.

4366. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soit x_n l'angle à la base d'un triangle rectangle de base n et de hauteur 1. Trouvez

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{k^2+k+1}.$$

4367. *Proposé par Kadir Altintas et Leonard Giugiuc.*

Soit a, b et c des nombres complexes distincts tels que $|a| = |b| = |c| = 1$ et $|a+b+c| \leq 1$. Prouvez que

$$\left|\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}\right| + \left|\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}\right| + \left|\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}\right| = 1.$$

4368. *Proposé par Ovidiu Furdui et Alina Sîntămărian.*

Calculez

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[2^n \left(\zeta(n) - 1\right) - 1\right],$$

où ζ indique la fonction zeta de Riemann définie par $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$.

4369. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Sur le triangle ABC, on prend les points $A_1,\ A_2 \in (BC)\,,\ B_1,\ B_2 \in (AC)\,,\ C_1,\ C_2 \in (AB)$, tel que $BA_1 = A_2C,\ CB_1 = B_2A,\ AC_1 = C_2B$. Sur les segments $B_2C_1,\ A_1C_2,\ A_2B_1$ on prend les points $A_3,\ B_3,\ C_3$ tels que

$$\frac{C_1A_3}{A_3B_2} = \frac{A_1B_3}{B_3C_2} = \frac{B_1C_3}{C_3A_2} = k.$$

Trouvez la valeur de k pour laquelle $AA_3,\ BB_3,\ CC_3$ sont des droites concourantes.

4370. *Proposé par Leonard Giugiuc et Sladjan Stankovik.*

Résolvez le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a+b+c+d = 4, \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 7, \\ abc+abd+acd+bcd-abcd = \frac{15}{16}. \end{cases}$$