THE CONTEST CORNER

No. 61

John McLoughlin

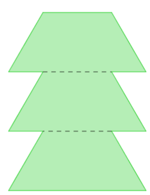
The problems featured in this section have appeared in, or have been inspired by, a mathematics contest question at either the high school or the undergraduate level. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 1, 2018**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

CC301. All natural numbers are coloured using 100 different colours. Prove that you can find several (no less than 2) different numbers, all of the same colour, that have a product with exactly 1000 different natural divisors.

CC302. Nikolas used construction paper to make a regular tetrahedron (a pyramid consisting of equilateral triangles). Then he cut it in some ingenious way, unfolded it and this resulted in the following Christmas tree-like shape consisting of three halves of a regular hexagon:



How did Nikolas do this?

CC303. Consider two convex polygons M and N with the following properties: polygon M has twice as many acute angles as polygon N has obtuse angles; polygon N has twice as many acute angles as polygon M has obtuse angles; each polygon has at least one acute angle; at least one of the polygons has a right angle.

a) Give an example of such polygons.

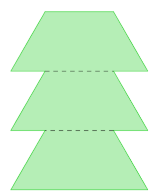
b) How many right angles can each of these polygons have? Find the complete set of all the possibilities and prove that no others exist.

CC304. Consider a natural number n greater than 1 and not divisible by 10. Can the last digit of n and second last digit of n^4 (that is, the digit in the tens position) be of the same parity?

CC305. Can you arrange n identical cubes in such a way that each cube has exactly three neighbours (cubes are considered to be neighbours if they have a common face)? Solve the problem for $n = 2016, 2017$ and 2018.

CC301. On a coloré tous les entiers strictement positifs en utilisant 100 couleurs distinctes. Démontrer qu'il est possible de trouver au moins deux nombres différents, tous de la même couleur, dont le produit admet exactement 1000 diviseurs différents.

CC302. Nicolas a utilisé du papier de bricolage pour construire un tétraèdre régulier (une pyramide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux). Il a ensuite découpé le tétraèdre de façon ingénieuse et l'a déplié de manière à obtenir la forme suivante composée de trois moitiés d'un hexagone régulier:



Comment Nicolas s'est-il pris?

CC303. On considère deux polygones convexes, M et N, qui satisfont aux conditions suivantes: le nombre d'angles aigus du polygone M est deux fois le nombre d'angles obtus du polygone N; le nombre d'angles aigus du polygone N est deux fois le nombre d'angles obtus du polygone M; chaque polygone a au moins un angle aigu; au moins un des polygones a un angle droit.

a) Donner un exemple de deux tels polygones.

b) Combien d'angles droits chacun de ces polygones peut-il avoir? Déterminer l'ensemble complet de toutes les possibilités et démontrer qu'il n'en existe aucune autre.

CC304. On considère un entier n supérieur à 1 qui n'est pas divisible par 10. Est-il possible que le chiffre des unités de n et le chiffre des dizaines de n^4 aient la même parité?

CC305. Est-il possible de placer n cubes identiques de manière que chaque cube ait exactement trois voisins (deux cubes sont voisins si un cube a une face qui touche au complet à une face de l'autre cube)? Résoudre le problème pour n égal à 2016, 2017 et 2018.