PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

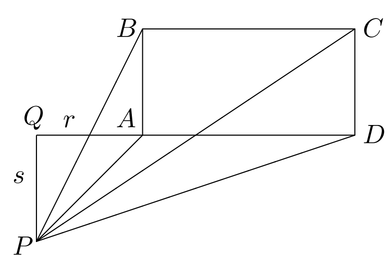
To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 1, 2018**.

The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

4301. *Proposed by Bill Sands.*

Four trees are situated at the corners of a rectangle $ABCD$. You are standing at a point P outside the rectangle, the nearest point of the rectangle to you being its corner A. To you in this position, the four trees, in the order B, A, C, D as in the diagram, appear to be equally spaced apart. Let Q be the foot of the perpendicular from P to line AD, and set $r = QA$, $s = PQ$.



a) Find the lengths of the sides of the rectangle in terms of r and s.

b) Find the range of $\angle APQ$.

4302. *Proposed by Martin Lukarevski.*

Let A be a $m \times n$ matrix with $m \geq n$ and X be any $n \times m$ matrix such that XA is invertible. Find the eigenvalues of the matrix $A(XA)^{-1}X$.

4303. *Proposed by Tung Hoang.*

Find the following limit

$$\lim_{n\to\infty} \left\{(6+\sqrt{35})^n\right\},$$

where $\{x\} = x - [x]$ and $[x]$ is the greatest integer function.

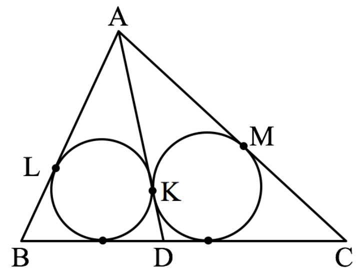
4304. *Proposed by Michel Bataille.*

Evaluate

$$\cot\frac{\pi}{7}+\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{4\pi}{7}+\cot^3\frac{\pi}{7}+\cot^3\frac{2\pi}{7}+\cot^3\frac{4\pi}{7}.$$

4305. *Proposed by Moshe Stupel and Avi Sigler.*

Find a nice description of the point D on side BC of a given triangle ABC so that the incircles of the resulting triangles ABD and ADC are tangent to one another at a point of their common tangent line AD.



4306. *Proposed by Marius Drăgan.*

Prove that

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{16n+20}\right]$$

for all $n\in\mathbb{N}$.

4307. *Proposed by Adnan Ibric and Salem Malikic.*

In a non-isosceles triangle ABC, let H and M denote the orthocenter and the midpoint of side BC, respectively. The internal angle bisector of $\angle BAC$ intersects BC and the circumcircle of triangle ABC at points D and E, $E\neq A$. If K is the foot of the perpendicular from H to AM and S is the intersection (other than E) of the circumscribed circles of triangles ABC and DEM, prove that quadrilateral $ASDK$ is cyclic.

4308. *Proposed by Leonard Giugiuc and Sladjan Stankovik.*

Let a, b and c be positive real numbers. Prove that

$$27abc(a^2b+b^2c+c^2a)\leq(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2.$$

4309. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let a, b and c be real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$2(a^4+b^4+c^4)\geq ab(ab+1)+bc(bc+1)+ca(ca+1).$$

4310. *Proposed by Steven Chow.*

Let $\triangle A_1B_1C_1$ be the incentral triangle with respect to $\triangle ABC$, i.e., A_1 is the point of intersection of $\overline{BC}$ and $\overleftrightarrow{AI}$ where I is the incentre of $\triangle ABC$, with B_1 and C_1 similarly defined. Let r be the inradius of $\triangle ABC$.

a) Prove that $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,(BC + CA + AB)\, r^2$.

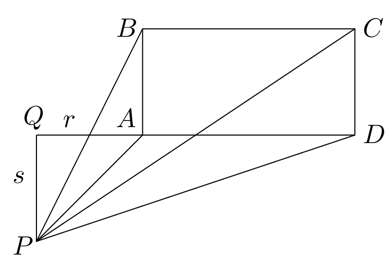
b) $\star$ Prove or disprove that $B_1C_1 \cdot C_1A_1 \cdot A_1B_1 \geq 3r^3\sqrt{3}$.

Remark. Curiously, this problem was discovered by the proposer when he misread problem 4203. See problem 4203 to appreciate the connection.

. . . .

4301. *Proposé par Bill Sands.*

Quatre arbres sont plantés aux coins d'un rectangle $ABCD$. Vous êtes debout à un point P en dehors du rectangle, le point A étant le point du rectangle le plus près de vous. De cette position, les quatre arbres, dans l'ordre B, A, C, D, comme dans le diagramme, semblent également espacés. Soit Q le pied de la perpendiculaire de P vers la ligne AD et posons $r = QA$ puis $s = PQ$.



a) Déterminer les longueurs des côtés du rectangle en termes de r et s.

b) Déterminer les valeurs possibles pour $\angle APQ$.

4302. *Proposé par Martin Lukarevski.*

Soit A une matrice $m \times n$ telle que $m \geq n$ et soit X une matrice $n \times m$ telle que XA est inversible. Déterminer les valeurs propres de $A(XA)^{-1}X$.

4303. *Proposé par Tung Hoang.*

Déterminer la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} \left\{(6+\sqrt{35})^n\right\},$$

où $\{x\} = x - [x]$, la fonction $[x]$ étant celle du plus grand entier.

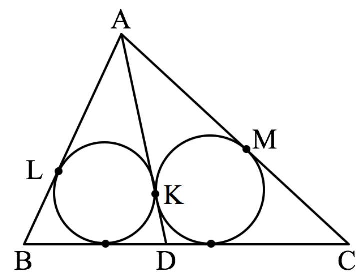
4304. *Proposé par Michel Bataille.*

Évaluer

$$\cot\frac{\pi}{7}+\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{4\pi}{7}+\cot^3\frac{\pi}{7}+\cot^3\frac{2\pi}{7}+\cot^3\frac{4\pi}{7}.$$

4305. *Proposé par Moshe Stupel and Avi Sigler.*

Décrire comment déterminer le point D sur le côté BC du triangle ABC, tel que les cercles inscrits des triangles résultants ABD et ADC sont tangents l'un à l'autre à un certain point sur leur tangente en commun AD.



4306. *Proposé par Marius Drăgan.*

Démontrer que

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{16n+20}\right]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4307. *Proposé par Adnan Ibric and Salem Malikic.*

Dans un triangle non isocèle ABC, soient H et M l'orthocentre et le mipoint du côté BC, respectivement. La bissectrice interne de $\angle BAC$ intersecte BC et le cercle circonscrit de ABC aux points D et E, où $E \neq A$. Si K est le pied de la perpendiculaire de H vers AM et S est l'intersection (différente de E) des cercles circonscrits de ABC et DEM, démontrer que le quadrilatère $ASDK$ est cyclique.

4308. *Proposé par Leonard Giugiuc and Sladjan Stankovik.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs. Démontrer que

$$27abc(a^2b+b^2c+c^2a)\le(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2.$$

4309. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a + b + c = 3$. Démontrer que

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq ab(ab + 1) + bc(bc + 1) + ca(ca + 1).$$

4310. *Proposé par Steven Chow.*

Soit I le centre du cercle inscrit de $\triangle ABC$. A_1 est le point d'intersection de BC et AI ; B_1 et C_1 sont définis de façon similaire. Soit r le rayon du cercle inscrit de $\triangle ABC$.

a) Démontrer que $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\,(BC + CA + AB)\,r^2$.

b) $\star$ Prouver ou prouver le contraire de l'inégalité $B_1C_1 \cdot C_1A_1 \cdot A_1B_1 \geq 3r^3\sqrt{3}$.

Remarque. Une mauvaise lecture du problème 4203 a conduit le proposeur à ce problème.

Chaos Train

Let $B(x, y)$ mean "person x accidentally bumps into person y on the train". Consider the following statements, under the assumption that the quantifiers range over all the people on a particular New York subway train heading down town Monday morning. Match each formal statement with the informal one.

$\exists x \exists y\ B(x, y)$	Chaos train (or empty train?).
$\exists x \forall y\ B(x, y)$	Somebody was blocking the only exit.
$\forall x \exists y\ B(x, y)$	Unfortunately, it happens.
$\forall x \forall y\ B(x, y)$	Super klutz runs through the train.
$\exists y \forall x\ B(x, y)$	Universal suffering.
$\forall y \exists x\ B(x, y)$	Extremely crowded or empty train.

By Joel David Hamkins.