THE OLYMPIAD CORNER

No. 359

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 1, 2018**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC361. Let $n \geq 2$ be a positive integer and define k to be the number of primes less than or equal to n. Let A be a subset of $S = \{2, \ldots, n\}$ such that $|A| \leq k$ and no two elements in A divide each other. Show that one can find a set B of cardinality k such that $A \subseteq B \subseteq S$ and no two elements in B divide each other.

OC362. Given a positive prime number p, prove that there exists a positive integer α such that $p|\alpha(\alpha - 1) + 3$ if and only if there exists a positive integer β such that $p|\beta(\beta - 1) + 25$.

OC363. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that

$$f(y)f(x + f(y)) = f(x)f(xy)$$

for all positive real numbers x and y.

OC364. Consider an acute triangle ABC. Suppose $AB < AC$, let I be the incenter, D the foot of perpendicular from I to BC, and suppose that altitude AH meets BI and CI at P and Q, respectively. Let O be the circumcenter of $\triangle IPQ$, extend AO to meet BC at L and suppose that the circumcircle of $\triangle AIL$ meets BC again at N. Prove that $\frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CN}$.

OC365. A square $ABCD$ is divided into n^2 equal small (fundamental) squares by drawing lines parallel to its sides. The vertices of the fundamental squares are called vertices of the grid. A rhombus is called *nice* when:

1. it is not a square;
2. its vertices are points of the grid;
3. its diagonals are parallel to the sides of the square $ABCD$.

Find (as a function of n) the number of nice rhombuses (n is a positive integer greater than 2).

. . . .

OC361. Soit n un entier ($n \geq 2$) et soit k le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Soit A un sous-ensemble de $S = \{2, \ldots, n\}$ tel que $|A| \leq k$ et que A ne contienne pas un élément qui est un diviseur d'un autre élément. Démontrer qu'il existe un ensemble B tel que $|B| = k$, $A \subseteq B \subseteq S$ et que B ne contienne pas un élément qui est un diviseur d'un autre élément.

OC362. Soit p un nombre premier. Démontrer qu'il existe un entier strictement positif α tel que $p|\alpha(\alpha-1)+3$ si et seulement si il existe un entier strictement positif β tel que $p|\beta(\beta-1)+25$.

OC363. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$f(y)f(x+f(y)) = f(x)f(xy)$$

pour tous réels x et y strictement positifs.

OC364. On considère un triangle acutangle ABC où $AB < AC$. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle et D le pied de la perpendiculaire abaissée de I jusqu'à BC. La hauteur AH coupe BI et CI aux points respectifs P et Q. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle IPQ. On prolonge AO jusqu'au point L sur BC. Le cercle circonscrit au triangle AIL coupe BC de nouveau au point N. Démontrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CN}$.

OC365. On divise un carré $ABCD$ en n^2 petits carrés en traçant des segments parallèles à ses côtés, formant ainsi un quadrillage. Les points d'intersection du quadrillage sont appelés des points de treillis. On dit qu'un losange est *plaisant* lorsque:

1. il n'est pas un carré;

2. ses sommets sont des points de treillis;

3. ses diagonales sont parallèles aux côtés du carré $ABCD$.

Déterminer, en fonction de n, le nombre de losanges plaisants, n étant un entier supérieur à 2.