

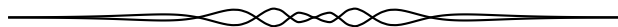
THE OLYMPIAD CORNER

No. 359

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

*To facilitate their consideration, solutions should be received by **June 1, 2018**.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.



OC361. Let $n \geq 2$ be a positive integer and define k to be the number of primes less than or equal to n . Let A be a subset of $S = \{2, \dots, n\}$ such that $|A| \leq k$ and no two elements in A divide each other. Show that one can find a set B of cardinality k such that $A \subseteq B \subseteq S$ and no two elements in B divide each other.

OC362. Given a positive prime number p , prove that there exists a positive integer α such that $p|\alpha(\alpha - 1) + 3$ if and only if there exists a positive integer β such that $p|\beta(\beta - 1) + 25$.

OC363. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that

$$f(y)f(x + f(y)) = f(x)f(xy)$$

for all positive real numbers x and y .

OC364. Consider an acute triangle ABC . Suppose $AB < AC$, let I be the incenter, D the foot of perpendicular from I to BC , and suppose that altitude AH meets BI and CI at P and Q , respectively. Let O be the circumcenter of $\triangle IPQ$, extend AO to meet BC at L and suppose that the circumcircle of $\triangle AIL$ meets BC again at N . Prove that $\frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CN}$.

OC365. A square $ABCD$ is divided into n^2 equal small (fundamental) squares by drawing lines parallel to its sides. The vertices of the fundamental squares are called vertices of the grid. A rhombus is called *nice* when:

1. it is not a square;
2. its vertices are points of the grid;
3. its diagonals are parallel to the sides of the square $ABCD$.

Find (as a function of n) the number of nice rhombuses (n is a positive integer greater than 2).

.....

OC361. Soit n un entier ($n \geq 2$) et soit k le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n . Soit A un sous-ensemble de $S = \{2, \dots, n\}$ tel que $|A| \leq k$ et que A ne contienne pas un élément qui est un diviseur d'un autre élément. Démontrer qu'il existe un ensemble B tel que $|B| = k$, $A \subseteq B \subseteq S$ et que B ne contienne pas un élément qui est un diviseur d'un autre élément.

OC362. Soit p un nombre premier. Démontrer qu'il existe un entier strictement positif α tel que $p|\alpha(\alpha-1)+3$ si et seulement si il existe un entier strictement positif β tel que $p|\beta(\beta-1)+25$.

OC363. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que

$$f(y)f(x+f(y)) = f(x)f(xy)$$

pour tous réels x et y strictement positifs.

OC364. On considère un triangle acutangle ABC où $AB < AC$. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle et D le pied de la perpendiculaire abaissée de I jusqu'à BC . La hauteur AH coupe BI et CI aux points respectifs P et Q . Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle IPQ . On prolonge AO jusqu'au point L sur BC . Le cercle circonscrit au triangle AIL coupe BC de nouveau au point N . Démontrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CN}$.

OC365. On divise un carré $ABCD$ en n^2 petits carrés en traçant des segments parallèles à ses côtés, formant ainsi un quadrillage. Les points d'intersection du quadrillage sont appelés des points de treillis. On dit qu'un losange est *plaisant* lorsque:

1. il n'est pas un carré;
2. ses sommets sont des points de treillis;
3. ses diagonales sont parallèles aux côtés du carré $ABCD$.

Déterminer, en fonction de n , le nombre de losanges plaisants, n étant un entier supérieur à 2.

