# PROBLEMS

*Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.*

*To facilitate their consideration, solutions should be received by* **May 1, 2018**.

*The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.*

*An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

## 4281$\star$. *Proposed by Šefket Arslanagić.*

Prove or disprove the following inequalities :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},\quad (a,b,c>0), \tag{1}$$
$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)},\quad (a_i>0, n\geq 3). \tag{2}$$

## 4282. *Proposed by Michel Bataille.*

Find $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ where the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$ is defined by $u_0=1$ and the recursion

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\frac{u_n}{4^n}}\right)$$

for every nonnegative integer $n$.

## 4283. *Proposed by Margarita Maksakova.*

We are given a convex polygon, whose vertices are coloured with three colours so that adjacent vertices get different colours. If all three colours are used in the colouring, prove that you can divide this polygon into triangles using non-intersecting diagonals in such a way that all the resulting triangles have vertices of all three different colours.

## 4284. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that if $a, b$ and $c$ are real numbers greater than 3 and

$$\log_a 2+\log_b 2+\log_c 2=\log_a\frac{1}{b}+\log_b\frac{1}{c}+\log_c\frac{1}{a},$$

then

$$\log_{a-1}(a^2+b^2)+\log_{b-1}(b^2+c^2)+\log_{c-1}(c^2+a^2)>3.$$

**4285**. *Proposed by Shafiqur Rahman and Leonard Giugiuc.*

Find the following limit :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!}-\frac{n}{e}-\frac{\ln n}{2e}\right).$$

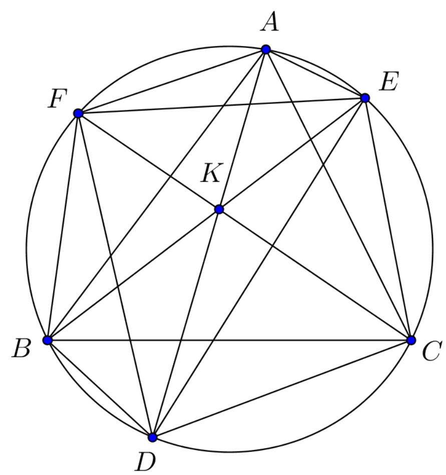
**4286**. *Proposed by Marian Cucoaneş and Marius Drăgan.*

Let $x, y$ and $z$ be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$(x^7+y^7+z^7)^2 \geq 3(x^9+y^9+z^9).$$

**4287**. *Proposed by Van Khea and Leonard Giugiuc.*

Let $ABC$ be a triangle inscribed in a circle $O$ and let $K$ be a point inside $ABC$. Suppose that $AK, BK$ and $CK$ cut the circle $O$ in points $D, E$ and $F$, respectively.




Prove that

$$\frac{BD\cdot CE}{BC\cdot DE}+\frac{CE\cdot AF}{CA\cdot EF}+\frac{AF\cdot BD}{AB\cdot FD}=1.$$

**4288**. *Proposed by Hung Nguyen Viet.*

A sequence $\{a_n\}$ is defined as follows :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+1}{a_n}$$

for every $n \geq 1$. Let $b_n = a_na_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Prove that for every positive integer $n$, the number $5b_n^2 - 6b_n + 1$ is a perfect square.

**4289**. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Prove that in any triangle $ABC$, we have

$$\sqrt[3]{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt[3]{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt[3]{\frac{r_c}{h_c}}\leq\frac{3R}{2r},$$

where $r_a, r_b, r_c$ are lengths of the exradii, $h_a, h_b, h_c$ are the lengths of the altitudes and $R$ and $r$ are circumradius and inradius, respectively, of the triangle $ABC$.

**4290**. *Proposed by Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc.*

Let $A_1A_2A_3A_4A_5$ be a cyclic convex pentagon and let $B_1B_2B_3B_4B_5$ be a regular pentagon, both inscribed in the same circle. Prove that

$$\sum_{1\leq i<j\leq 5}A_iA_j\leq\sum_{1\leq i<j\leq 5}B_iB_j.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**4281**★. *Proposé par Šefket Arslanagić.*

Démontrer ou infirmer les inégalités suivantes :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},\quad (a,b,c>0), \tag{1}$$

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geq\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)},\quad (a_i>0, n\geq 3). \tag{2}$$

**4282**. *Proposé par Michel Bataille.*

Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ étant définie par $u_0=1$ et

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\frac{u_n}{4^n}}\right),$$

pour tous entiers non négatifs $n$.

**4283**. *Proposé par Margarita Maksakova.*

On considère un polygone dont chaque sommet est colorié d'une de trois couleurs, de manière que les sommets adjacents soient de couleurs différentes. Si les trois couleurs ont été utilisées, démontrer qu'il est possible de diviser le polygone en triangles à l'aide de diagonales qui ne se coupent pas, de manière que chaque triangle ait des sommets de trois couleurs différentes.

**4284**. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soit $a, b$ et $c$ des réels supérieurs à 3 tels que

$$\log_a 2 + \log_b 2 + \log_c 2 = \log_a \frac{1}{b} + \log_b \frac{1}{c} + \log_c \frac{1}{a}.$$

Démontrer que

$$\log_{a-1}(a^2 + b^2) + \log_{b-1}(b^2 + c^2) + \log_{c-1}(c^2 + a^2) > 3.$$

**4285**. *Proposé par Shafiqur Rahman et Leonard Giugiuc.*

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sqrt[n]{n!} - \frac{n}{e} - \frac{\ln n}{2e} \right).$$

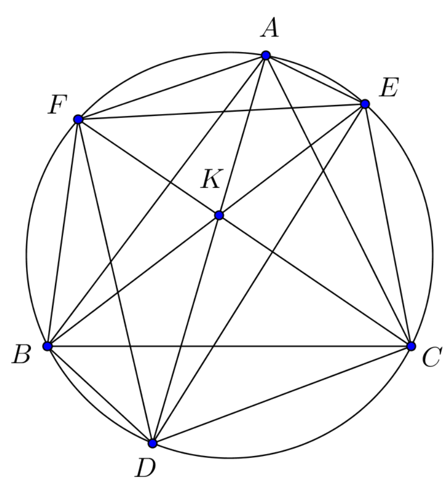
**4286**. *Proposé par Marian Cucoaneş et Marius Drăgan.*

Soit $x, y$ et $z$ des réels positifs tels que $xyz = 1$. Démontrer que

$$(x^7 + y^7 + z^7)^2 \geq 3(x^9 + y^9 + z^9).$$

**4287**. *Proposé par Van Khea et Leonard Giugiuc.*

Soit $ABC$ un triangle inscrit dans un cercle et $K$ un point à l'intérieur de $ABC$. Les demi-droites $AK, BK, CK$ coupent le cercle aux points respectifs $D, E$ et $F$.




Démontrer que

$$\frac{BD \cdot CE}{BC \cdot DE} + \frac{CE \cdot AF}{CA \cdot EF} + \frac{AF \cdot BD}{AB \cdot FD} = 1.$$

**4288**. *Proposé par Hung Nguyen Viet.*

Une suite $\{a_n\}$ est définie comme suit :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n}$$

pour tous $n$ ($n \geq 1$). Soit $b_n = a_n a_{n+1}$, pour $n = 1, 2, \ldots$ Démontrer que pour tout entier strictement positif $n$, le nombre $5b_n^2 - 6b_n + 1$ est un carré parfait.

**4289**. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Démontrer que pour tout triangle $ABC$, on a

$$\sqrt[3]{\frac{r_a}{h_a}} + \sqrt[3]{\frac{r_b}{h_b}} + \sqrt[3]{\frac{r_c}{h_c}} \leq \frac{3R}{2r},$$

$h_a, h_b$ et $h_c$ étant les hauteurs du triangle, $R$ étant le rayon du cercle circonscrit au triangle, $r$ étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle et $r_a, r_b$ et $r_c$ étant les rayons des cercles exinscrits.

**4290**. *Proposé par Dao Thanh Oai et Leonard Giugiuc.*

Soit $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagone convexe inscriptible et $B_1B_2B_3B_4B_5$ un pentagone régulier, tous deux inscrits dans un même cercle. Démontrer que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} A_iA_j \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 5} B_iB_j.$$