THE OLYMPIAD CORNER

No. 357

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 1, 2018**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC351. Solve the system of equations

$$\begin{aligned} &6x - y + z^2 = 3,\\ &x^2 - y^2 - 2z = -1,\\ &6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 = 0. \end{aligned}$$

where $x, y, z \in \mathbb{R}$.

OC352. Let O_1 and O_2 intersect at P and Q. Their common external tangent touches O_1 and O_2 at A and B respectively. A circle Γ passing through A and B intersects O_1, O_2 at D, C. Prove that $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{DP}{DQ}$.

OC353. Prove that for any positive integer k,

$$(k^2)! \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

is an integer.

OC354. Solve the equation $1 + x^z + y^z = LCM(x^z, y^z)$ in the set of natural numbers.

OC355. Let $\mathbb{N}$ denote the set of natural numbers. Define a function $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by $T(2k) = k$ and $T(2k+1) = 2k+2$. We write $T^2(n) = T(T(n))$ and in general $T^k(n) = T^{k-1}(T(n))$ for any $k > 1$.

a) Show that for each $n \in \mathbb{N}$, there exists k such that $T^k(n) = 1$.

b) For $k \in \mathbb{N}$, let c_k denote the number of elements in the set $\{n : T^k(n) = 1\}$. Prove that $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$, for $k \geq 1$.

. . . .

OC351. Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned}
&6x - y + z^2 = 3\\
&x^2 - y^2 - 2z = -1\\
&6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 = 0,
\end{aligned}$$

x, y et z étant des réels.

OC352. Soit O_1 et O_2 deux cercles qui se coupent en P et Q. Leur tangente commune extérieure touche O_1 et O_2 aux points respectifs A et B. Un cercle Γ passe aux points A et B et coupe O_1 et O_2 aux points respectifs D et C. Démontrer que $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{DP}{DQ}$.

OC353. Démontrer que pour tout entier strictement positif k,

$$(k^2)! \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

est un entier.

OC354. Résoudre l'équation $1 + x^z + y^z = PPCM(x^z, y^z)$ dans l'ensemble des entiers strictement positifs.

OC355. On définit une fonction $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $T(2k) = k$ et $T(2k+1) = 2k+2$. On définit aussi $T^2(n) = T(T(n))$ et $T^k(n) = T^{k-1}(T(n))$ lorsque $k > 1$.

a) Démontrer que pour tout n ($n \in \mathbb{N}$), il existe une valeur de k pour laquelle $T^k(n) = 1$.

b) Pour tout k ($k \in \mathbb{N}$), soit c_k le nombre d'éléments de l'ensemble $\{n : T^k(n) = 1\}$. Démontrer que $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$, pour tout k ($k \geq 1$).