

THE OLYMPIAD CORNER

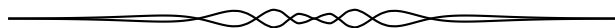
No. 357

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

*To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 1, 2018**.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.



OC351. Solve the system of equations

$$\begin{aligned}6x - y + z^2 &= 3, \\x^2 - y^2 - 2z &= -1, \\6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 &= 0.\end{aligned}$$

where $x, y, z \in \mathbb{R}$.

OC352. Let O_1 and O_2 intersect at P and Q . Their common external tangent touches O_1 and O_2 at A and B respectively. A circle Γ passing through A and B intersects O_1, O_2 at D, C . Prove that $\frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{DQ}$.

OC353. Prove that for any positive integer k ,

$$(k^2)! \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

is an integer.

OC354. Solve the equation $1 + x^z + y^z = LCM(x^z, y^z)$ in the set of natural numbers.

OC355. Let \mathbb{N} denote the set of natural numbers. Define a function $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ by $T(2k) = k$ and $T(2k+1) = 2k+2$. We write $T^2(n) = T(T(n))$ and in general $T^k(n) = T^{k-1}(T(n))$ for any $k > 1$.

- Show that for each $n \in \mathbb{N}$, there exists k such that $T^k(n) = 1$.
- For $k \in \mathbb{N}$, let c_k denote the number of elements in the set $\{n : T^k(n) = 1\}$. Prove that $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$, for $k \geq 1$.

.....

OC351. Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} 6x - y + z^2 &= 3 \\ x^2 - y^2 - 2z &= -1 \\ 6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 &= 0, \end{aligned}$$

x, y et z étant des réels.

OC352. Soit O_1 et O_2 deux cercles qui se coupent en P et Q . Leur tangente commune extérieure touche O_1 et O_2 aux points respectifs A et B . Un cercle Γ passe aux points A et B et coupe O_1 et O_2 aux points respectifs D et C . Démontrer que $\frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{DQ}$.

OC353. Démontrer que pour tout entier strictement positif k ,

$$(k^2)! \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

est un entier.

OC354. Résoudre l'équation $1 + x^z + y^z = PPCM(x^z, y^z)$ dans l'ensemble des entiers strictement positifs.

OC355. On définit une fonction $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $T(2k) = k$ et $T(2k+1) = 2k+2$. On définit aussi $T^2(n) = T(T(n))$ et $T^k(n) = T^{k-1}(T(n))$ lorsque $k > 1$.

- a) Démontrer que pour tout n ($n \in \mathbb{N}$), il existe une valeur de k pour laquelle $T^k(n) = 1$.
- b) Pour tout k ($k \in \mathbb{N}$), soit c_k le nombre d'éléments de l'ensemble $\{n : T^k(n) = 1\}$. Démontrer que $c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$, pour tout k ($k \geq 1$).

