THE OLYMPIAD CORNER

No. 355

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **March 1, 2018**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC341. There are 30 teams in the NBA and every team plays 82 games in the year. Owners of the NBA teams want to divide all teams into Western and Eastern Conferences (not necessarily equally), such that the number of games between teams from different conferences is half of number of all games. Can they do it?

OC342. Consider the second-degree polynomial $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Define the sequence of polynomials $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ and $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$ for every integer $n \geq 1$.

a) Show that there exists a real number r such that $P_n(r) < 0$ for every positive integer n.

b) For how many integers m does $P_n(m) < 0$ hold for infinitely many positive integers n?

OC343. Determine all pairs of positive integers (a, n) with $a \geq n \geq 2$ for which $(a+1)^n + a - 1$ is a power of 2.

OC344. Find all $a \in \mathbb{R}$ such that there exists a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

- $f(1) = 2016$;
- $f(x + y + f(y)) = f(x) + ay \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

OC345. Let $\triangle ABC$ be an acute triangle, and let I_B, I_C, and O denote its B-excenter, C-excenter, and circumcenter, respectively. Points E and Y are selected on $\overline{AC}$ such that $\angle ABY = \angle CBY$ and $\overline{BE} \perp \overline{AC}$. Similarly, points F and Z are selected on $\overline{AB}$ such that $\angle ACZ = \angle BCZ$ and $\overline{CF} \perp \overline{AB}$. Lines $\overleftrightarrow{I_B F}$ and $\overleftrightarrow{I_C E}$ meet at P. Prove that $\overline{PO}$ and $\overline{YZ}$ are perpendicular.

. . . .

OC341. La NBA compte 30 équipes et chaque équipe joue 82 matchs au cours de la saison régulière. Les propriétaires des équipes de la NBA aimeraient placer les équipes dans la conférence de l'est ou dans la conférence de l'ouest (sans que les conférences aient nécessairement un nombre égal d'équipes), de manière que le nombre de matchs entre des équipes de chaque conférence soit égal à la moitié du nombre total de matchs. Peuvent-ils réussir à le faire?

OC342. On considère le polynôme du second degré $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. On définit une suite de polynômes comme suit:

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{2016} \text{ et } P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016} \text{ pour tout entier } n \ (n \geq 1).$$

a) Démontrer qu'il existe un réel r tel que $P_n(r) < 0$ pour tous entiers n strictement positifs.

b) Combien y a-t-il d'entiers m tels que $P_n(m) < 0$ pour un nombre infini d'entiers n strictement positifs?

OC343. Déterminer tous les couples d'entiers (a, n) $(a \geq n \geq 2)$ pour lesquels la valeur de $(a+1)^n + a - 1$ est une puissance de 2.

OC344. Déterminer tous les réels a pour lesquels il existe une fonction f $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ qui satisfait à

- $f(1) = 2016$,
- $f(x + y + f(y)) = f(x) + ay \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

OC345. Soit ABC un triangle acutangle et O le centre du cercle circonscrit au triangle. Soit I_B et I_C les centres respectifs des cercles exinscrits dans les angles B et C. Des points E et Y sont choisis sur le segment AC tels que $\angle ABY = \angle CBY$ et $BE \perp AC$. De même, des points F et Z sont choisis sur le segment AB tels que $\angle ACZ = \angle BCZ$ et $CF \perp AB$. Les droites I_BF et I_CE se coupent en P. Démontrer que les segments PO et YZ sont perpendiculaires.