

# THE CONTEST CORNER

No. 57

John McLoughlin

*The problems featured in this section have appeared in, or have been inspired by, a mathematics contest question at either the high school or the undergraduate level. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.*

*To facilitate their consideration, solutions should be received by **March 1, 2018**.*

*The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.*

**CC281.** In the Original Six era of the NHL, one particular season, each team played 20 games (each team played the other 5 teams 4 times each). Each game ended as a win, a loss or a tie (there were no ‘overtime losses’). At the end of this certain season, the standings were as below. What were all the possible outcomes for Montreal’s number of wins  $X$ , losses  $Y$  and ties  $Z$ ?

Team	Wins	Losses	Ties
Toronto	2	12	6
Boston	6	10	4
Detroit	7	12	1
New York	7	9	4
Chicago	11	7	2
Montreal	$X$	$Y$	$Z$

**CC282.** Calculate the value of

$$\left(3^{4/3} - 3^{1/3}\right)^3 + \left(3^{5/3} - 3^{2/3}\right)^3 + \left(3^{6/3} - 3^{3/3}\right)^3 + \dots + \left(3^{2006/3} - 3^{2003/3}\right)^3.$$

**CC283.** Two bags, Bag  $A$  and Bag  $B$ , each contain 9 balls. The 9 balls in each bag are numbered from 1 to 9. Suppose one ball is removed randomly from Bag  $A$  and another ball from Bag  $B$ . If  $X$  is the sum of the numbers on the balls left in Bag  $A$  and  $Y$  is the sum of the numbers of the balls remaining in Bag  $B$ , what is the probability that  $X$  and  $Y$  differ by a multiple of 4?

**CC284.** Define the function  $f(x)$  to be the largest integer less than or equal to  $x$  for any real  $x$ . For example,  $f(1) = 1, f(3/2) = 1, f(7/2) = 3, f(7/3) = 2$ . Let

$$g(x) = f(x) + f(x/2) + f(x/3) + \dots + f(x/(x-1)) + f(x/x).$$

- Calculate  $g(4) - g(3)$  and  $g(7) - g(6)$ .
- What is  $g(116) - g(115)$ ?

**CC285.** Find all values of  $k$  so that  $x^2 + y^2 = k^2$  will intersect the circle with equation  $(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 49$  at exactly one point.

.....

**CC281.** À l'époque des six premières équipes de la LNH, lors d'une saison particulière, chaque équipe jouait 20 matchs (chaque équipe rencontrait chacune des 5 autres équipes 4 fois). Chaque match se terminait par une victoire, une défaite ou un match nul (il n'y avait aucun jeu en temps supplémentaire). Le tableau suivant présente le classement à la fin de cette saison. Quels sont tous les résultats possibles quant au nombre  $X$  de victoires, au nombre  $Y$  de défaites et au nombre  $Z$  de matchs nuls de l'équipe de Montréal?

Équipe	Victoires	Défaites	Matchs nuls
Toronto	2	12	6
Boston	6	10	4
Detroit	7	12	1
New York	7	9	4
Chicago	11	7	2
Montréal	$X$	$Y$	$Z$

**CC282.** Calculer la valeur de

$$\left(3^{4/3} - 3^{1/3}\right)^3 + \left(3^{5/3} - 3^{2/3}\right)^3 + \left(3^{6/3} - 3^{3/3}\right)^3 + \dots + \left(3^{2006/3} - 3^{2003/3}\right)^3.$$

**CC283.** Deux sacs,  $A$  et  $B$ , contiennent chacun 9 boules. Dans chaque sac, les 9 boules sont numérotées de 1 à 9. On retire au hasard une boule du sac  $A$  et une boule du sac  $B$ . Soit  $X$  la somme des numéros sur les boules qui se trouvent encore dans le sac  $A$  et  $Y$  la somme des numéros sur les boules qui se trouvent encore dans le sac  $B$ . Quelle est la probabilité pour que la différence entre  $X$  et  $Y$  soit un multiple de 4?

**CC284.** On définit la fonction  $f$  sur l'ensemble des réels comme suit:  $f(x)$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Par exemple,  $f(1) = 1$ ,  $f(\frac{3}{2}) = 1$ ,  $f(\frac{7}{2}) = 3$  et  $f(\frac{7}{3}) = 2$ . Soit

$$g(x) = f(x) + f(x/2) + f(x/3) + \dots + f(x/(x - 1)) + f(x/x).$$

- a) Calculer  $g(4) - g(3)$  et  $g(7) - g(6)$ .
- b) Quelle est la valeur de  $g(116) - g(115)$ ?

**CC285.** Déterminer toutes les valeurs de  $k$  pour que le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = k^2$  et le cercle d'équation  $(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 49$  se coupent en exactement un point.

