PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **January 1, 2018**.

The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

4241. *Proposed by Margarita Maksakova.*

Place the numbers $1, 2, \ldots, 11$ and some real number r on the edges of a cube so that at every vertex the sum of the numbers on the incident edges is the same. What is the smallest value of r for which this is possible?

4242. *Proposed by Mihály Bencze.*

Let $x_1 = 4$ and $x_{n+1} = [\sqrt[3]{2}x_n]$ for all $n \geq 1$, where $[\cdot]$ denotes the integer part function. Determine the largest positive $n \in \mathbb{N}$ for which x_n, x_{n+1}, x_{n+2} form an arithmetic progression.

4243. *Proposed by Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc and Hung Nguyen Viet.*

Let ABC be a triangle. Let I, r and R be the incenter, the inradius and the circumradius of ABC, respectively. Let D be the point of intersection of the line AI and the circumcircle of ABC. Similarly, define points E and F. Prove that

$$AD \cdot BE \cdot CF \geq 16rR^2.$$

4244. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle with no right angle and let H be its orthocenter. The parallel to BC through H intersects AB and AC at E and F and the perpendiculars through A to AB and AC at U and V, respectively. Let X and Y be the orthogonal projections of A onto BU and CV, respectively. Prove that E, F, X, Y are concyclic.

4245. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with circumcircle Γ, and let t be its tangent at A. Define T and E to be the points where the circle with centre B and radius BA again intersects t and AC, respectively, while T' and F are the points where the circle with centre C and radius CA intersects t and AB, respectively. If X is the point where TE and $T'F$ intersect, and Y is the second point where the line AX intersects Γ, prove that BC is the perpendicular bisector of the line segment XY.

4246. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Find the best lower bound for $abc + abd + acd + bcd$ over all positive a, b, c and d satisfying

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

4247. *Proposed by Missouri State University Problem Solving Group.*

Let B and C be two fixed points on a circle centered at O that are not diametrically opposite. Let A be a variable point on the circle distinct from B and C and not belonging to the perpendicular bisector of BC. Let M and N be the midpoints of the segments BC and AO, respectively. The line AM intersects the circle again at D, and finally, NM and OD intersect at P. Determine the locus of points P as A moves around the circle.

4248. *Proposed by Michel Bataille.*

Let n be a positive integer and let $p(x) = 1 + p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x)$ where the polynomials $p_k(x)$ are defined by $p_0(x) = 2,\ p_1(x) = x^2 + 2$ and the recursion

$$p_{k+1}(x) = (x^2 + 2)p_k(x) - p_{k-1}(x)$$

for $k \in \mathbb{N}$. Find all the complex roots of $p(x)$.

4249. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let a, b, c be real numbers with at most one of them equal to zero. Prove that

$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

4250. *Proposed by Michael Rozenberg and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an acute angle triangle such that $\sin A = \sin B \sin C$. Prove that

$$\tan A \tan B \tan C \geq \frac{16}{3}.$$

. . . .

4241. *Proposé par Margarita Maksakova.*

À l'aide des nombres $1, 2, \ldots, 11$ et un certain nombre réel r, étiqueter les arêtes d'un cube de façon à ce que la somme des étiquettes des arêtes incidentes à un sommet soit la même, quel que soit le sommet. Quelle est la plus petite valeur possible pour r?

4242. *Proposé par Mihály Bencze.*

Soit $x_1 = 4$ et $x_{n+1} = [\sqrt[3]{2}x_n]$ pour $n \geq 1$, où $[\cdot]$ dénote la partie entière d'un nombre réel. Déterminer la plus grande valeur positive $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle x_n, x_{n+1}, x_{n+2} forme une progression arithmétique.

4243. *Proposé par Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc et Hung Nguyen Viet.*

Soit ABC un triangle. Soient I, r et R le centre du cercle inscrit, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit de ABC, respectivement. Soit D le point d'intersection de la ligne AI et le cercle circonscrit de ABC. De façon similaire, définir les points E et F. Démontrer que

$$AD \cdot BE \cdot CF \geq 16rR^2.$$

4244. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle sans angle rectangle et soit H son orthocentre. La parallèle à BC passant par H intersecte AB et AC en E et F, et les perpendiculaires à AB et AC au point A en U et V, respectivement. Soient X et Y les projections orthogonales de A vers BU et CV, respectivement. Démontrer que E, F, X et Y sont cocycliques.

4245. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle aigu avec cercle circonscrit Γ et soit t sa tangente à A. Définissons T et E comme étant les points où le cercle avec centre B et rayon BA intersecte de nouveau t et AC, respectivement, puis T' et F comme étant les points où le cercle avec centre C et rayon CA intersecte de nouveau t et AB, respectivement. Si X est le point d'intersection de TE et $T'F$, et Y est le second point d'intersection de la ligne AX et Γ, démontrer que BC est la bissectrice orthogonale du segment XY.

4246. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Déterminer la meilleure borne inférieure pour $abc + abd + acd + bcd$ par rapport aux valeurs positives a, b, c et d satisfaisant

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

4247. *Proposé par Missouri State University Problem Solving Group.*

Soient B et C deux points sur un cercle centré à O, mais non diamétraux. Soit A un point variable sur le cercle, distinct de B et C et n'appartenant pas à la bissectrice orthogonale de BC. Soient M et N les mi points des segments BC et AO, respectivement. La ligne AM interscte de nouveau le cercle en D; enfin, NM

et OD intersectent en P. Déterminer le lieu géométrique des points P lorsque A se déplace sur le cercle.

4248. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit n un entier positif et soit $p(x) = 1 + p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_n(x)$, où les polynômes $p_k(x)$ sont définis par $p_0(x) = 2,\ p_1(x) = x^2 + 2$ et la récursion

$$p_{k+1}(x) = (x^2 + 2)p_k(x) - p_{k-1}(x)$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines complexes de $p(x)$.

4249. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soient a, b et c des nombres réels, dont au plus un seul est égal à zéro. Démontrer que

$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

4250. *Proposé par Michael Rozenberg et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle aigu tel que $\sin A = \sin B \sin C$. Démontrer que

$$\tan A \tan B \tan C \geq \frac{16}{3}.$$