THE OLYMPIAD CORNER

No. 353

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **January 1, 2018**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC331. Find all triples of nonnegative integers (x, y, z) and $x \leq y$ such that

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77.$$

OC332. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. Show that there exists a square $A'B'C'D'$ (where vertices may be ordered clockwise or counter-clockwise) such that $A \neq A', B \neq B', C \neq C', D \neq D'$ and AA', BB', CC', DD' are all concurrent.

OC333. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so that for all real numbers x and y,

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x + y))^2.$$

OC334. Let p be an odd prime number. For positive integers k satisfying $1 \leq k \leq p - 1$, the number of divisors of $kp + 1$ between k and p exclusive is a_k. Find the value of $a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}$.

OC335. Medians AM_A, BM_B and CM_C of a triangle ABC intersect at M. Let Ω_A be the circumcircle of the triangle that passes through the midpoint of AM and is tangent to BC at M_A. Define Ω_B and Ω_C analogously. Prove that Ω_A, Ω_B and Ω_C intersect at one point.

. . . .

OC331. Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers non négatifs $(x \leq y)$ tels que

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77.$$

OC332. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe impair. Démontrer qu'il existe un carré $A'B'C'D'$ (dont les sommets peuvent être nommés dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire) de manière que $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$ et que les droites AA', BB', CC' et DD' soient concourantes.

OC333. Déterminer toutes les fonctions f ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) telles que

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x + y))^2$$

pour tous réels x et y.

OC334. Soit p un nombre premier. Pour tout entier k ($1 \leq k \leq p - 1$), soit a_k le nombre de diviseurs de $kp + 1$ situés entre k et p. Déterminer la valeur de $a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}$.

OC335. Soit M le point d'intersection des médianes AM_A, BM_B et CM_C du triangle ABC. Soit Ω_A le cercle circonscrit au triangle qui passe au milieu de AM et qui est tangent à BC au point M_A. Ω_B et Ω_C sont définis de façon semblable. Démontrer que Ω_A, Ω_B et Ω_C sont concourantes.

Math Quotes

Like the ski resort full of girls hunting for husbands and husbands hunting for girls, the situation is not as symmetrical as it might seem.

Alan Lindsay Mackay in "A Dictionary of Scientific Quotations", Bristol: IOP Publishing, 1991.