THE OLYMPIAD CORNER

No. 350

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er octobre 2017**.

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

OC316. Soit ABC un triangle rectangle en B et soit BD la hauteur abaissée depuis B jusqu'à AC. Soit P, Q et I les centres des cercles inscrits dans les triangles respectifs ABD, CBD et ABC. Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle PIQ est situé sur l'hypoténuse AC.

OC317. On a accueilli 110 équipes lors d'un tournoi de volleyball. Chaque équipe a rencontré chaque autre équipe une fois (il n'y a aucun match nul au volleyball). Or, dans n'importe quel ensemble de 55 équipes, il y a une équipe qui n'a pas perdu plus de 4 matchs contre les 54 autres équipes de l'ensemble. Démontrer que dans le tournoi, il y a une équipe qui n'a pas perdu plus de 4 des matchs contre les 109 autres équipes.

OC318. Soit n un entier strictement positif et k un entier de 1 à n. On considère un quadrillage blanc de dimensions $n \times n$ et on procède comme suit:

> On trace k rectangles délimités par les lignes du quadrillage de manière que chaque rectangle recouvre le coin supérieur droit 1×1 du quadrillage $n \times n$ et on peint les k rectangles en noir. De cette manière, il reste toujours de l'espace blanc sur le quadrillage.

Combien de figures blanches différentes peut-on former avec k rectangles de manière que ces figures ne puissent être formées avec moins de k rectangles?

OC319. Soit p un nombre premier supérieur à 30. Démontrer qu'un des nombres suivants,

$$p+1, 2p+1, 3p+1, \ldots, (p-3)p+1,$$

est la somme des carrés de deux entiers.

OC320. Soit n un entier supérieur à 1. On écrit d'abord n ensembles au tableau, puis on leur fait subir une série de manoeuvres. Une *manoeuvre* se fait comme suit:

> On choisit deux ensembles A et B au tableau de manière que l'un ne soit pas un sous-ensemble de l'autre et on les remplace par $A \cap B$ et $A \cup B$.

Déterminer le nombre maximal de manoeuvres pour tous ensembles possibles présentés au départ.

. . . .

OC316. Let ABC be a right-angled triangle with $\angle B = 90°$. Let BD be the altitude from B. Let P, Q and I be the incenters of triangles ABD, CBD and ABC respectively. Show that the circumcenter of PIQ lies on the hypotenuse AC.

OC317. In a recent volleyball tournament, 110 teams participated. Every team has played every other team exactly once (there are no ties in volleyball). It turns out that in any set of 55 teams, there is one which has lost to no more than 4 of the remaining 54 teams. Prove that in the entire tournament, there is a team that has lost to no more than 4 of the remaining 109 teams.

OC318. Let n be a positive integer and let k be an integer between 1 and n inclusive. Given an $n \times n$ white board, we do the following process.

> We draw k rectangles with integer side lengths and sides parallel to the sides of the $n \times n$ board, and such that each rectangle covers the top-right corner of the $n \times n$ board. Then, the k rectangles are painted black. This process leaves a white figure in the board.

How many different white figures can be formed with k rectangles that cannot be formed with less than k rectangles?

OC319. Let $p > 30$ be a prime number. Prove that one of the following numbers

$$p + 1, 2p + 1, 3p + 1, \ldots, (p - 3)p + 1$$

is the sum of two integer squares $x^2 + y^2$ for integers x and y.

OC320. Let $n \geq 2$ be a given integer. Initially, we write n sets on the blackboard and do a sequence of *moves* as follows:

> choose two sets A and B on the blackboard such that neither of them is a subset of the other, and replace A and B by $A \cap B$ and $A \cup B$.

Find the maximum number of moves in a sequence for all possible initial sets.