

# THE OLYMPIAD CORNER

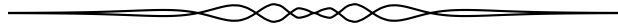
No. 347

Carmen Bruni

*The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.*

*To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 1, 2017**.*

*The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.*



**OC301.** Solve the following Diophantine equation for integers  $x$  and  $y$ :

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

**OC302.** Let  $x, y$  and  $z$  be real numbers where the sum of any two among them is not 1. Show that,

$$\frac{(x^2 + y)(x + y^2)}{(x + y - 1)^2} + \frac{(y^2 + z)(y + z^2)}{(y + z - 1)^2} + \frac{(z^2 + x)(z + x^2)}{(z + x - 1)^2} \geq 2(x + y + z) - \frac{3}{4}.$$

Find all triples  $(x, y, z)$  of real numbers satisfying the equality case.

**OC303.** Let  $ABC$  be a triangle with orthocenter  $H$  and circumcenter  $O$ . Let  $K$  be the midpoint of  $AH$ . Point  $P$  lies on  $AC$  such that  $\angle BKP = 90^\circ$ . Prove that  $OP \parallel BC$ .

**OC304.** Let  $k$  be a fixed positive integer. Let  $F(n)$  be the smallest positive integer bigger than  $kn$  such that  $F(n) \cdot n$  is a perfect square. Prove that if  $F(n) = F(m)$ , then  $m = n$ .

**OC305.** Let  $p$  be a prime number for which  $\frac{p-1}{2}$  is also prime, and let  $a, b, c$  be integers not divisible by  $p$ . Prove that there are at most  $1 + \sqrt{2p}$  positive integers  $n$  such that  $n < p$  and  $p$  divides  $a^n + b^n + c^n$ .

.....

**OC301.** Résoudre l'équation diophantienne

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3,$$

$x$  et  $y$  étant des entiers.

**OC302.** Soit  $x, y$  et  $z$  des nombres réels dont les sommes deux à deux ne sont pas égales à 1. Démontrer que

$$\frac{(x^2 + y)(x + y^2)}{(x + y - 1)^2} + \frac{(y^2 + z)(y + z^2)}{(y + z - 1)^2} + \frac{(z^2 + x)(z + x^2)}{(z + x - 1)^2} \geq 2(x + y + z) - \frac{3}{4}$$

et déterminer les triplets  $(x, y, z)$  qui vérifient l'égalité.

**OC303.** Soit  $ABC$  un triangle,  $H$  son orthocentre et  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle. Soit  $K$  le milieu de  $AH$  et  $P$  le point sur  $AC$  tel que  $\angle BKP = 90^\circ$ . Démontrer que  $OP$  est parallèle à  $BC$ .

**OC304.** Soit  $k$  un entier fixe strictement positif. Soit  $F(n)$  le plus petit entier strictement positif supérieur à  $kn$  tel que  $F(n) \cdot n$  est un carré parfait. Démontrer que si  $F(n) = F(m)$ , alors  $m = n$ .

**OC305.** Soit  $p$  un nombre premier pour lequel  $\frac{p-1}{2}$  est aussi un nombre premier et soit  $a, b$  et  $c$  des entiers qui ne sont pas divisibles par  $p$ . Démontrer qu'il existe au plus  $1 + \sqrt{2p}$  entiers strictement positifs  $n$  tels que  $n < p$  et que  $p$  soit un diviseur de  $a^n + b^n + c^n$ .

---

## OLYMPIAD SOLUTIONS

*Statements of the problems in this section originally appear in 2015: 41(7), p. 288–289.*

---

**OC241.** Let  $n$  be a natural number. For every positive real numbers  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  such that  $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 1$  prove that:

$${}^x\sqrt{n} + \dots + {}^{x_{n+1}}\sqrt{n} \geq n^{\sqrt{x_1}} + \dots + n^{\sqrt{x_{n+1}}}.$$

*Originally problem 5 from day 2 of the 2014 Iran Team Selection Test.*

*We received 2 correct submissions. We present the solution by Michel Bataille.*

We shall use the following inequality of means: if  $x, a_1, \dots, a_n > 0$ , then

$$\left( \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} \geq \sqrt[x]{a_1 \dots a_n}$$

which rewrites as

$$a_1^x + \dots + a_n^x \geq n(a_1 \dots a_n)^{x/n}. \quad (1)$$