THE CONTEST CORNER

No. 49

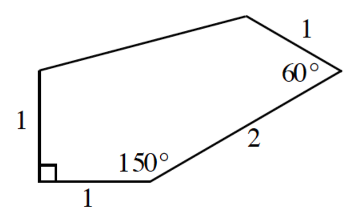
John McLoughlin

The problems featured in this section have appeared in, or have been inspired by, a mathematics contest question at either the high school or the undergraduate level. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **May 1, 2017**.

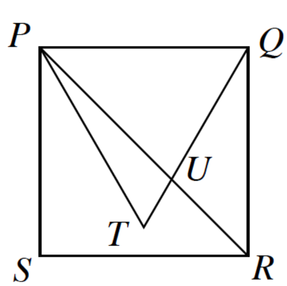
The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of Université de Saint-Boniface in Winnipeg, for translations of the problems.

CC241. Over many centuries, tilings have fascinated mathematicians and the society in general. Particularly interesting are tilings of the plane that use a single type of tile. You can tile the plane with some regular polygons (such as equilateral triangles, squares, regular hexagons). On the other hand, you cannot tile the plane using regular pentagons. Now, we know that some non-regular pentagons can be used to tile the plane, although not all of them are yet known (see page 397 of this issue for all known pentagonal tilings). It was therefore with great enthusiasm that in August 2015, the world welcomed the discovery of a new pentagonal tiling, illustrated below.



Use the lengths given and angle sizes to calculate the exact area of this pentagon.

CC242. The diagram below shows square $PQRS$ with sides of length 1 unit. Triangle PQT is equilateral. Show that the area of triangle UQR is $(\sqrt{3}-1)/4$ square units.



CC243. Eight islands each have one or more air services. An air service consists of flights to and from another island, and no two services link the same pair of islands. There are 17 air services in all between the islands. Show that it must be possible to use these air services to fly between any pair of islands.

CC244. How many distinct solutions consisting of positive integers does this system of equations have?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 5, \\ z_1 + z_2 + z_3 &= 5, \\ x_1 + y_1 + z_1 &= 5, \\ x_2 + y_2 + z_2 &= 5, \\ x_3 + y_3 + z_3 &= 5. \end{aligned}$$

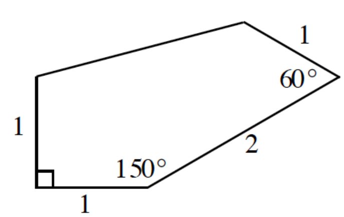
CC245. A pyramid stands on horizontal ground. Its base is an equilateral triangle with sides of length a, the other three edges of the pyramid are of length b and its volume is V. Show that

$$V = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

The pyramid is then placed so that a non-equilateral face lies on the ground. Find the height of the pyramid in this position.

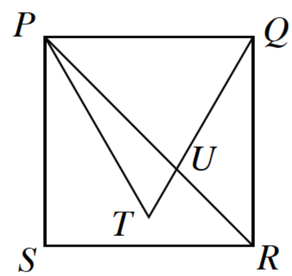
. . . .

CC241. Au fil des années, les pavages ont fasciné les mathématiciens et la société. Particulièrement utiles sont les pavages du plan à l'aide d'une seule tuile. Dans certains cas, des polygones réguliers (triangles équilatéraux, carrés, hexagones réguliers) jouent le rôle. Par contre, il est impossible de paver le plan à l'aide de pentagones réguliers. Or, on sait que certains pentagones non réguliers peuvent paver le plan, bien qu'on ne les connait pas tous (voir, à la page 397, tous les pavages pentagonaux connus). C'est donc avec beaucoup d'enthousiasme qu'en août 2015, le monde a accueilli la découverte d'un nouveau pavage pentagonal, illustré ci-bas.



Utiliser les longueurs et angles donnés afin de calculer la surface.

CC242. Le schéma ci-bas illustre un carré $PQRS$ avec côtés de longueur 1 unité. Le triangle PQT est équilatéral. Démontrer que la surface du triangle UQR est $(\sqrt{3}-1)/4$ unités carrées.



CC243. Huit îles sont chacune dotées d'au moins un service aérien. Un service aérien consiste de vols aller-retours entre deux îles ; deux services différents ne peuvent pas relier la même paire d'îles. Au total, on compte 17 services aériens. Démontrer qu'il est possible d'utiliser ces services aériens pour se déplacer d'une île à n'importe quelle autre.

CC244. Combien de solutions distinctes en entiers positifs le système suivant possède-t-il?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5,\\ y_1 + y_2 + y_3 &= 5,\\ z_1 + z_2 + z_3 &= 5,\\ x_1 + y_1 + z_1 &= 5,\\ x_2 + y_2 + z_2 &= 5,\\ x_3 + y_3 + z_3 &= 5. \end{aligned}$$

CC245. Une pyramide se situe sur un terrain horizontal. Sa base est un triangle équilatéral avec côtés de longueur a, ses trois autres côtés sont de longueur b et son volume est V. Démontrer que

$$V = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

La pyramide est maintenant placée de façon à ce qu'une des faces non équilatérales soit horizontale. Déterminer la hauteur de la pyramide dans cette nouvelle position.