PROBLEMS

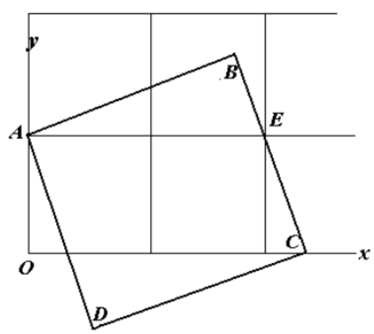
Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **April 1, 2017**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

4161. *Proposed by Peter Y. Woo.*

A high-school math teacher discovered some geometry problems while sliding a rug under his feet, over a floor with square tiles of length 1 unit. He chose x and y axes along two edges of some arbitrary tile. Today, he moved the square rug $ABCD$ of length between 1 and 2 units, so that A is on $(0, 1)$ and C is on $(c, 0)$ for some $c > 2$. Then surprise! He noticed that the edge BC goes through the point $(2, 1)$. Can you find $\angle BAE$?



4162. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let ABC be a triangle such that $\angle B = 2\angle C$. We extend the side BC by a segment CD equal to $\frac{1}{3}BC$. Prove that

$$Area(ABC) = \frac{1}{4}|BC|^2 \cdot \cot\frac{\theta}{2},$$

where $\theta = \angle BAD$.

4163. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b be real numbers with $0 < a < b$ and consider a positive sequence x_n such that

$$\lim_{n\to\infty}\left(ax_n + \frac{b}{x_n}\right) = 2\sqrt{ab}.$$

Find $\lim_{n\to\infty} x_n$ or show that it does not exist.

4164. *Proposed by G. Di Bona, A. Fiorentino, A. Moscariello, and G. G. N. Angilella.*

In an election, N voters are to elect k representatives. Each voter must indicate exactly m distinct preferences, with $m \leq k < N$. Every voter is a candidate themselves, and all candidates have a distinct age. The candidates are then ranked according to the number of votes received, and the k candidates who receive the largest number of votes are elected. In case of degeneracies, the eldest candidate is elected.

What is the minimum number of votes that a candidate should receive, in order to be sure to get elected?

4165. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that for all real numbers x_1, x_2, x_3 and x_4, we have,

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| + 2(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) \geq 6 \sqrt[6]{\prod_{1 \leq i < j \leq 4} |x_i + x_j|}.$$

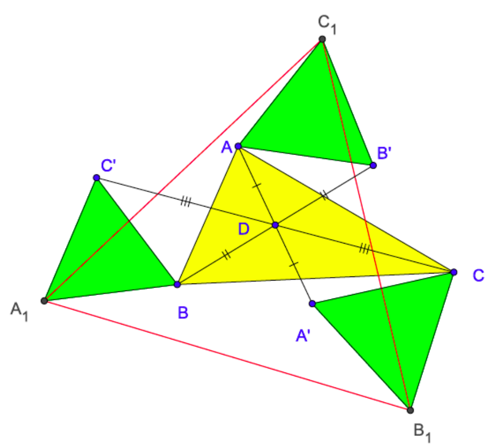
4166. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Show that for all real numbers x, y and z, we have:

$$2^{4x-y} + 2^{4y-z} + 2^{4z-x} \geq 2^{x+2y} + 2^{y+2z} + 2^{z+2x}.$$

4167. *Proposed by Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc.*

Consider triangle ABC and let D be any point in the plane. Let points A', B', C' be reflections of points A, B, C in D, respectively. Construct the 3 triangles $AB'C_1$, $CA'B_1$ and $BC'A_1$ outwardly as the given diagram indicates:



Show that $A_1B_1C_1$ is an equilateral triangle.

4168. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 18$ and $abc = 4$. Prove that

$$6 \leq a + b + c \leq 2\sqrt{2\sqrt{6} + 4} + \sqrt{6} - 2.$$

When does equality hold?

4169. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\left(a\sqrt{\frac{b}{a+b}} + b\sqrt{\frac{c}{b+c}} + c\sqrt{\frac{a}{c+a}}\right)\left(b\sqrt{\frac{a+b}{b}} + c\sqrt{\frac{b+c}{c}} + a\sqrt{\frac{c+a}{a}}\right) \leq (a+b+c)^2.$$

4170. *Proposed by Miguel Ochoa Sanchez and Leonard Giugiuc.*

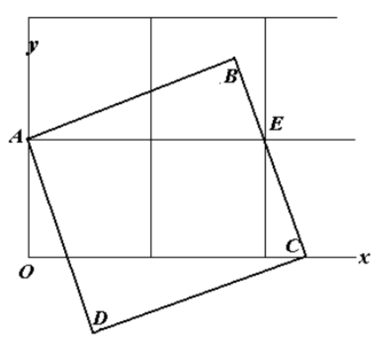
Let $ABCD$ be a circumscribed quadrilateral (that is, a quadrilateral for which an incircle can be constructed) and let P be the intersection point of AC and BD. Let h_a, h_b, h_c and h_d denote the distances from P to AB, BC, CD and DA, respectively. Prove that

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{h_b + h_d}{h_a + h_c}.$$

. . . .

4161. *Proposé par Peter Y. Woo.*

Une enseignante du secondaire a pondu un problème de géométrie pendant qu'elle remuait un tapis sur un parquet avec ses pieds. Le parquet est recouvert de tuiles carrées avec des côtés de longueur 1. Elle choisit arbitrairement les axes des abscisses et des ordonnées le long de deux côtés d'une tuile particulière. Son tapis $ABCD$ est de forme carrée dont les côtés mesurent entre 1 et 2 unités. Elle place le coin A au point $(0, 1)$ et le coin C sur un point $(c, 0)$, où $c > 2$. Surprise ! Elle constate que le côté BC passe au point $(2, 1)$. Quelle est la mesure de l'angle BAE ?



4162. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit ABC un triangle pour lequel $\angle B = 2\angle C$. On prolonge le côté BC jusqu'au point D de manière que $CD = \frac{1}{3}BC$. Démontrer que

$$Aire(ABC) = \frac{1}{4}|BC|^2 \cdot \cot\frac{\theta}{2},$$

où $\theta = \angle BAD$.

4163. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit a et b des réels tels que $0 < a < b$ et soit une suite x_n de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to\infty}\left(ax_n + \frac{b}{x_n}\right) = 2\sqrt{ab}.$$

Déterminer $\lim_{n\to\infty} x_n$ ou démontrer qu'elle n'existe pas.

4164. *Proposé par G. Di Bona, A. Fiorentino, A. Moscariello et G. G. N. Angilella.*

Dans une élection, N électeurs doivent choisir k représentants. Chaque électeur doit indiquer exactement m choix distincts, où $m \leq k < N$. Chaque électeur est aussi un candidat et chaque candidat a un âge distinct. Les candidats sont classés selon le nombre de votes qu'ils ont reçus et les k candidats qui ont reçu le plus grand nombre de votes sont élus. Dans le cas de dégénérescences, le candidat le plus âgé est élu.

Quel est le nombre minimal de votes qu'un candidat doit recevoir pour s'assurer d'être élu ?

4165. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que pour tous réels x_1, x_2, x_3 et x_4, on a

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| + 2(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) \geq 6\sqrt[6]{\prod_{1\leq i<j\leq 4} |x_i + x_j|}.$$

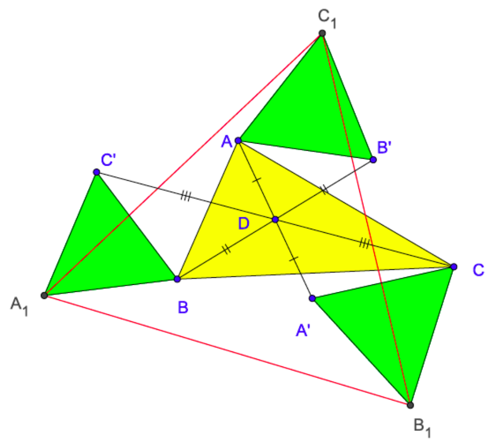
4166. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Démontrer que pour tous réels x, y et z, on a

$$2^{4x-y} + 2^{4y-z} + 2^{4z-x} \geq 2^{x+2y} + 2^{y+2z} + 2^{z+2x}.$$

4167. *Proposé par Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc.*

On considère un triangle ABC et un point quelconque D dans le plan. Soit A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par une réflexion par rapport à D. On construit les triangles $AB'C_1$, $CA'B_1$ et $BC'A_1$ vers l'extérieur, comme dans la figure suivante :



Démontrer que le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

4168. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit a, b et c des réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 18$ et $abc = 4$. Démontrer que

$$6 \leq a + b + c \leq 2\sqrt{2\sqrt{6} + 4} + \sqrt{6} - 2.$$

Quand y a-t-il égalité ?

4169. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\left(a\sqrt{\frac{b}{a+b}} + b\sqrt{\frac{c}{b+c}} + c\sqrt{\frac{a}{c+a}}\right)\left(b\sqrt{\frac{a+b}{b}} + c\sqrt{\frac{b+c}{c}} + a\sqrt{\frac{c+a}{a}}\right) \leq (a+b+c)^2.$$

4170. *Proposé par Miguel Ochoa Sanchez et Leonard Giugiuc.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible (c.-à-d. qui admet un cercle inscrit) et soit P le point d'intersection de AC et de BD. Soit h_a, h_b, h_c et h_d les distances respectives de P à AB, BC, CD et DA. Démontrer que

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{h_b + h_d}{h_a + h_c}.$$