THE OLYMPIAD CORNER

No. 345

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by **April 1, 2017**.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC291. Let $n \geq 2$ be an integer and let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers such that $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prove that

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\right) \leq \frac{n}{2}.$$

OC292. Consider two points with integer coordinates on the graph of a polynomial function with integer coefficients. If the distance between them is an integer, prove that the segment that connects them is parallel to the horizontal axis.

OC293. You are given $N \geq 3$. A set of N points on a plane is *acceptable* if their abscissae are unique, and each of the points is coloured either red or blue. A graph of a polynomial function $P(x)$ *divides* a set of acceptable points if there are no red dots above the graph of $P(x)$ and no blue dots below, or if there are no blue dots above the graph of $P(x)$ and no red dots below. Keep in mind, dots of both colours can be present on the graph of $P(x)$ itself. For what least value of k is an arbitrary acceptable set of N points divisible by a polynomial of degree k?

OC294. In given triangle $\triangle ABC$, the difference between sizes of each pair of sides is at least $d > 0$. Let G and I be the centroid and incenter of $\triangle ABC$ and r be its inradius. Show that

$$|AIG| + |BIG| + |CIG| \geq \frac{2}{3}dr,$$

where $|XYZ|$ is the area of triangle $\triangle XYZ$.

OC295. Let $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ be the set of positive integers. Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a function that gives a positive integer value, to every positive integer. Suppose that f satisfies the following conditions:

$$f(1) = 1 \quad \text{and} \quad f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

Find the value of $f(2015)$.

. . . .

OC291. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Démontrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\right) \leq \frac{n}{2}.$$

OC292. Sur la représentation graphique d'une fonction polynôme à coefficients entiers, deux points sont choisis avec des entiers pour coordonnées. Démontrer que si la distance entre les points est un entier, alors le segment qui les joint est parallèle à l'axe horizontal.

OC293. Soit N un entier $(n \geq 3)$. Un ensemble de N points dans le plan est appelé *acceptable* si les abscisses des points sont distinctes et si chacun des points est coloré en bleu ou en rouge. On dit qu'un ensemble acceptable de points dans le plan est *divisible* par la courbe représentative d'une fonction polynôme s'il n'y a aucun point rouge au-dessus de la courbe et aucun point bleu au-dessous de la courbe ou bien s'il n'y a aucun point bleu au-dessus de la courbe et aucun point rouge au-dessous de la courbe. À noter que des points de chaque couleur peuvent être situés sur la courbe. Quelle est la plus petite valeur de k pour laquelle n'importe quel ensemble acceptable de N points est divisible par un polynôme de degré k?

OC294. On considère un triangle ABC dont la différence entre les longueurs de chaque paire de côtés est supérieure ou égale à d $(d > 0)$. Soit G le centre de gravité du triangle, I le centre du cercle inscrit dans le triangle et r le rayon de ce cercle. Démontrer que

$$|AIG| + |BIG| + |CIG| \geq \frac{2}{3}dr,$$

$|XYZ|$ étant l'aire du triangle XYZ.

OC295. Soit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction à valeurs entières strictement positives qui satisfait aux conditions suivantes:

$$f(1) = 1 \quad \text{and} \quad f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

Déterminer la valeur de $f(2015)$.