PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er janvier 2017***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction remercie André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

4131. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a, b et c des réels tels que $\tanh a \tanh b + \tanh b \tanh c + \tanh c \tanh a = 1$. Démontrer que l'équation

$$\sinh(2a - x) + \sinh(2b - x) + \sinh(2c - x) + \sinh x = 4 \sinh a \sinh b \sinh c$$

admet exactement une solution réelle.

4132. *Proposé par Marian Maciocha.*

Soit a et b des entiers tels que $a^2 + b^2$ soit un diviseur de $2a^3 + b^2$. Démontrer que l'entier $2a^3b^2 + ab^2 + 3b^4$ est divisible par l'entier $a^2 + b^2$.

4133. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu et Neculai Stanciu.*

Soit la suite (a_n) définie de façon récursive par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = (2n+1)!!a_n$ pour tous entiers n positifs. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}.$$

4134. *Proposé par Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru et Qing Song.*

Soit a, b et c des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ et $abc = -2$. Démontrer que

$$a + b + c \geq 0 \text{ ou } a + b + c \leq -4.$$

4135. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Soit un triangle ABC avec $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Démontrer que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3\Big(\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c}\Big)}.$$

4136. *Proposé par Daniel Sitaru et Mihaly Bencze.*

Soit $a, b, c \in (0, \infty)$. Démontrer que

$$b\int_0^a e^{-t^2} dt + c\int_0^b e^{-t^2} dt + a\int_0^c e^{-t^2} < \frac{\pi}{2}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

4137. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit n un entier ($n \geq 4$) et soit a, b et c trois vecteurs réels unitaires à n dimensions, orthogonaux deux à deux. Démontrer que $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \leq 1$ pour tous i.

4138. *Proposé par Lorian Saceanu.*

a) Soit ABC un triangle acutangle ayant pour demi-périmètre p. Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Démontrer que

$$a\sin\frac{A}{2} + b\sin\frac{B}{2} + c\sin\frac{C}{2} \geq p + \frac{p(R-2r)^2}{4R(R+2r)}.$$

b) Soit ABC un triangle scalène ayant pour demi-périmètre p. Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Démontrer que

$$a\sin\frac{A}{2} + b\sin\frac{B}{2} + c\sin\frac{C}{2} \geq p + \frac{p^2 - 12Rr - 3r^2}{2\sqrt{6R(4R+r)}}.$$

4139. *Proposé par Ángel Plaza.*

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable de manière que $f^{(n)}$ soit continue, que $f(0) = 0$ et que $f^{(i)}(0) = 0$ pour tous i inférieurs ou égaux à n. Démontrer que

$$\int_{-1}^{1} (f^{(n)}(x))^2 \, dx \geq \frac{(2n+1)(n!)^2}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x) \, dx\right)^2.$$

4140. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Déterminer tous les entiers strictement positifs x et y pour lesquels $x \leq y$ et le nombre

$$p = \frac{(x+y)(xy-4)}{xy+13}$$

est premier.

. . . .

4131. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b, c be real numbers such that

$$\tanh a \tanh b + \tanh b \tanh c + \tanh c \tanh a = 1.$$

Show that the equation

$$\sinh(2a - x) + \sinh(2b - x) + \sinh(2c - x) + \sinh x = 4 \sinh a \sinh b \sinh c$$

has exactly one real solution.

4132. *Proposed by Marian Maciocha.*

Let a and b be integers such that $a^2 + b^2$ divides $2a^3 + b^2$. Prove that the integer $2a^3b^2 + ab^2 + 3b^4$ is divisible by $a^2 + b^2$.

4133. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Consider the sequence (a_n) defined recursively by $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = (2n+1)!!a_n$ for all positive integers n. Compute

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{(2n-1)!!}}{\sqrt[n^2]{a_n}}.$$

4134. *Proposed by Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru and Qing Song.*

Let a, b and c be real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ and $abc = -2$. Prove that

$$a + b + c \geq 0 \quad \text{or} \quad a + b + c \leq -4.$$

4135. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Let ABC be a triangle with $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Prove that the following relationship holds

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3\Big(\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c}\Big)}.$$

4136. *Proposed by Daniel Sitaru and Mihaly Bencze.*

Prove that if $a, b, c \in (0, \infty)$ then:

$$b\int_0^a e^{-t^2}dt + c\int_0^b e^{-t^2}dt + a\int_0^c e^{-t^2} < \frac{\pi}{2}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

4137. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let $n \geq 4$ be an integer and let a, b, c be three real n-dimensional vectors which are pairwise orthogonal and of unit length. Prove that $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \leq 1$ for all i.

4138. *Proposed by Lorian Saceanu.*

a) Let ABC be an acute triangle with semi-perimeter s, inradius r and circumradius R. Prove that

$$a \sin\frac{A}{2} + b \sin\frac{B}{2} + c \sin\frac{C}{2} \geq s + \frac{s(R-2r)^2}{4R(R+2r)}.$$

b) Let ABC be a scalene triangle with semi-perimeter s, inradius r and circumradius R. Prove that

$$a \sin\frac{A}{2} + b \sin\frac{B}{2} + c \sin\frac{C}{2} \geq s + \frac{s^2 - 12Rr - 3r^2}{2\sqrt{6R(4R+r)}}.$$

4139. *Proposed by Ángel Plaza.*

Let $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ be a n times differentiable function with $f^{(n)}$ continuous such that $f(0) = 0$, and $f^{(i)}(0) = 0$ for all even i less than or equal to n. Show that

$$\int_{-1}^{1} (f^{(n)}(x))^2 \; dx \geq \frac{(2n+1)(n!)^2}{2} \left(\int_{-1}^{1} f(x) \; dx \right)^2.$$

4140. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Find all positive integers $x \leq y$ so that

$$p = \frac{(x+y)(xy-4)}{xy+13}$$

is prime.