THE OLYMPIAD CORNER

No. 342

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er janvier 2017***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, d'avoir traduit les problèmes.

OC276. Soit m et n des entiers strictement positifs. Sachant que le nombre

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$$

est un entier, démontrer que k est un carré parfait.

OC277. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y)$$

pour tous réels x, y.

OC278. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Déterminer toutes les permutations $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour lesquelles $x_i < x_{i+2}$ lorsque $1 \leq i \leq n-2$ et $x_i < x_{i+3}$ lorsque $1 \leq i \leq n-3$.

OC279. Soit ABC un triangle acutangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit P et Q des points sur les côtés respectifs AB et AC tels que

$$BP \cdot CQ = AP \cdot AQ.$$

Soit I un cercle dont le centre est situé sur la hauteur du triangle ABC abaissée au point A et qui passe aux points A, P et Q. Démontrer que I est tangent au cercle circonscrit au triangle BOC.

OC280. Soit $g(n)$ le plus grand commun diviseur de n et 2015. Déterminer le nombre de triplets (a, b, c) qui satisfont aux deux conditions suivantes:

1. $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 2015\}$ et
2. $g(a), g(b), g(c), g(a+b), g(b+c), g(c+a), g(a+b+c)$ sont distincts.

. . . .

OC276. Let m and n be positive integers. If the number

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$$

is an integer, prove that k is a perfect square.

OC277. Find all real functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(x^2+yf(x)) = xf(x+y)$.

OC278. Find all possible permutations $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ of $\{1, 2, ..., n\}$ so that when $1 \leq i \leq n-2$ then we have $x_i < x_{i+2}$ and when $1 \leq i \leq n-3$ then we have $x_i < x_{i+3}$. Here $n \geq 4$.

OC279. Let ABC be an acute-angled triangle with circumcenter O. Let I be a circle with centre on the altitude from A in ABC, passing through vertex A and points P and Q on sides AB and AC. Assume that

$$BP \cdot CQ = AP \cdot AQ.$$

Prove that I is tangent to the circumcircle of triangle BOC.

OC280. Let $g(n)$ be the greatest common divisor of n and 2015. Find the number of triples (a, b, c) which satisfy the following two conditions:

1. $a, b, c \in 1, 2, ..., 2015$;
2. $g(a), g(b), g(c), g(a+b), g(b+c), g(c+a), g(a+b+c)$ are pairwise distinct.