PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **May 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

4021. *Proposed by Arkady Alt.*

Let $(\overline{\mathbf{a}}_n)_{n\geq 0}$ be a sequence of Fibonacci vectors defined recursively by $\overline{\mathbf{a}}_0 = \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}_1 = \overline{\mathbf{b}}$ and $\overline{\mathbf{a}}_{n+1} = \overline{\mathbf{a}}_n + \overline{\mathbf{a}}_{n-1}$ for all integers $n \geq 1$. Prove that, for all integers $n \geq 1$, the sum of vectors $\overline{\mathbf{a}}_0 + \overline{\mathbf{a}}_1 + \cdots + \overline{\mathbf{a}}_{4n+1}$ equals $k\overline{\mathbf{a}}_i$ for some i and constant k.

4022. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

In a triangle ABC, let internal angle bisectors from angles A, B and C intersect the sides BC, CA and AB in points D, E and F and let the incircle of ΔABC touch the sides in M, N, and P, respectively. Show that

$$\frac{PA}{PB} + \frac{MB}{MC} + \frac{NC}{NA} \geq \frac{FA}{FB} + \frac{DB}{DC} + \frac{EC}{EA}.$$

4023. *Proposed by Ali Behrouz.*

Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$ with $x > y$, we have

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = f(xf(x)).$$

4024. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let a, b, c and d be real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Prove that

$$abc + abd + acd + bcd + 4 \geq a + b + c + d$$

and determine when equality holds.

4025. *Proposed by Dragoljub Miloşević.*

Prove that for positive numbers a, b and c, we have

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{c}{2a+b}\right)^2} \geq \sqrt[3]{3}.$$

4026. *Proposed by Roy Barbara.*

Prove or disprove the following property: if r is any non-zero rational number, then the real number $x = (1+r)^{1/3} + (1-r)^{1/3}$ is irrational.

4027. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{ab}{a+ab+b} + \frac{bc}{b+bc+c} + \frac{ac}{a+ac+c} \leq 1.$$

4028. *Proposed by Michel Bataille.*

In 3-dimensional Euclidean space, a line ℓ meets orthogonally two distinct parallel planes $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}'$ at H and H'. Let r and r' be positive real numbers with $r \leq r'$; let $\mathcal{C}$ be the circle in $\mathcal{P}$ with center H, radius r, and let $\mathcal{C}'$ in $\mathcal{P}'$ be similarly defined. For a fixed point M' on $\mathcal{C}'$, find the maximum distance between the lines ℓ and MM' as M moves about the circle $\mathcal{C}$ (where the distance between two lines is the minimum distance from a point of one line to a point of the other).

4029. *Proposed by Paul Bracken.*

Suppose $a > 0$. Find the solutions of the following equation in the interval $(0, \infty)$:

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = x - a.$$

4030. *Proposed by Paolo Perfetti.*

a) Prove that $4^{\cos t} + 4^{\sin t} \geq 5$ for $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Prove that $6^{\cos t} + 6^{\sin t} \geq 7$ for $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

. . . .

4021. *Proposé par Arkady Alt.*

Soit $(\overline{\mathbf{a}}_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs définie de façon récursive à la manière de Fibonacci : $\overline{\mathbf{a}}_0 = \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}_1 = \overline{\mathbf{b}}$ et $\overline{\mathbf{a}}_{n+1} = \overline{\mathbf{a}}_n + \overline{\mathbf{a}}_{n-1}$. Démontrer que la somme $\overline{\mathbf{a}}_0 + \overline{\mathbf{a}}_1 + \cdot + \overline{\mathbf{a}}_{4n+1}$ est égale à $k\overline{\mathbf{a}}_i$ pour un i quelconque et une constante k.

4022. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Dans un triangle ABC, les bissectrices internes des angles A, B et C coupent les côtés BC, CA et AB aux points respectifs D, E et F. De plus, le cercle inscrit dans le triangle touche ces mêmes côtés aux points respectifs M, N et P. Démontrer que

$$\frac{PA}{PB} + \frac{MB}{MC} + \frac{NC}{NA} \geq \frac{FA}{FB} + \frac{DB}{DC} + \frac{EC}{EA}.$$

4023. *Proposé par Ali Behrouz.*

Déterminer toutes les fonctions f ($f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$) pour lesquelles

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = f(xf(x))$$

pour tous réels x et y ($x > y$).

4024. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Démontrer que

$$abc + abd + acd + bcd + 4 \geq a + b + c + d$$

et déterminer les conditions auxquelles il y a égalité.

4025. *Proposé par Dragoljub Miloşević.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{c}{2a+b}\right)^2} \geq \sqrt[3]{3}.$$

4026. *Proposé par Roy Barbara.*

Démontrer ou infirmer l'énoncé suivant: Si r est un nombre rationnel non nul, alors le nombre x défini par $x = (1+r)^{1/3} + (1-r)^{1/3}$ est irrationnel.

4027. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Démontrer que

$$\frac{ab}{a+ab+b} + \frac{bc}{b+bc+c} + \frac{ac}{a+ac+c} \leq 1.$$

4028. *Proposé par Michel Bataille.*

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère une droite ℓ orthogonale à deux plans parallèles distincts, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, qui coupe ces plans aux points respectifs H et H'. Soit r et r' des réels strictement positifs tels que $r \leq r'$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon r. De même, $\mathcal{C}'$ est le cercle dans $\mathcal{P}'$ de centre

H' et de rayon r'. Étant donné un point fixe M' sur $\mathcal{C}'$, déterminer la distance maximale entre les droites ℓ et MM' lorsque M se meut autour du cercle $\mathcal{C}$. (La distance entre deux droites est la distance minimale entre un point d'une droite et un point de l'autre droite.)

4029. *Proposé par Paul Bracken.*

Soit un réel a ($a > 0$). Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $(0, \infty)$:

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = x - a$$

4030. *Proposé par Paolo Perfetti.*

a) Démontrer que $4^{\cos t} + 4^{\sin t} \geq 5$, pour tout t dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Démontrer que $6^{\cos t} + 6^{\sin t} \geq 7$, pour tout t dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Math Quotes

Numbers written on restaurant bills within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.

This single statement took the scientific world by storm. It completely revolutionized it. So many mathematical conferences got held in such good restaurants that many of the finest minds of a generation died of obesity and heart failure and the science of math was put back by years.

Douglas Adams, "Life, the Universe and Everything." New York: Harmony Books, 1982.