THE OLYMPIAD CORNER

No. 331

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **May 1, 2016***, although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC221. From the point P outside a circle ω with center O draw the tangents PA and PB where A and B lie on ω. From a random point M on the chord AB, we draw the perpendicular to OM, which intersects PA and PB in C and D, respectively. Prove that M is the midpoint of CD.

OC222. Let a, b be natural numbers with $ab > 2$. Suppose that the sum of their greatest common divisor and least common multiple is divisible by $a + b$. Prove that the quotient is at most $\frac{a+b}{4}$. When is this quotient exactly equal to $\frac{a+b}{4}$?

OC223. Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

for all $x, y \in \mathbb{Z}$ with $x \neq 0$.

OC224. Let $n > 1$ be an integer. An $n \times n$-square is divided into n^2 unit squares. Of these unit squares, n are coloured green and n are coloured blue, and all remaining ones are coloured white. Are there more such colourings for which there is exactly one green square in each row and exactly one blue square in each column; or colourings for which there is exactly one green square and exactly one blue square in each row?

OC225. Find the maximum value of real number k such that

$$\frac{a}{1 + 9bc + k(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + k(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + k(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

holds for all non-negative real numbers $a,\ b,\ c$ satisfying $a + b + c = 1$.

. . . .

OC221. À partir d'un point P à l'extérieur d'un cercle ω de centre O, on trace les tangentes PA et PB au cercle, A et B étant les points de contact. À un point quelconque M sur la corde AB, on trace une perpendiculaire à OM, qui coupe PA et PB aux points respectifs C et D. Démontrer que M est le milieu du segment CD.

OC222. Soit a et b des nombres naturels tels que $ab > 2$. Sachant que la somme de leur plus grand commun diviseur et de leur plus petit commun multiple est divisible par $a + b$, démontrer que le quotient de cette division est inférieur ou égal à $\frac{a+b}{4}$. Quelles sont les conditions auxquelles le quotient est égal à $\frac{a+b}{4}$?

OC223. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$ $(x \neq 0)$.

OC224. Soit un entier n supérieur à 1. Un carré $n \times n$ est divisé en n^2 carrés unités. On veut colorier le grand carré de manière que n carrés unités soient de couleur verte, n carrés unités soient de couleur bleue et les autres soient blancs. Y a-t-il plus de coloriages possibles dans lesquels il y a exactement un carré vert dans chaque rangée et exactement un carré bleu dans chaque colonne ou plus de coloriages possibles dans lesquels il y a exactement un carré vert et exactement un carré bleu dans chaque rangée?

OC225. Déterminer la valeur maximale d'un nombre réel k tel que

$$\frac{a}{1 + 9bc + k(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + k(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + k(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

pour tous réels non négatifs $a,\ b,\ c$ qui vérifient l'équation $a + b + c = 1$.