# PROBLEMS

*Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.*

*Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le* **1er décembre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

*La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.*

**4091**. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Déterminer le plus grand nombre strictement positif $k$ de manière que

$$a+b+c+3k-3 \geq k\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right)$$

pour tous nombres strictement positifs $a$, $b$ et $c$ tels que $abc=1$.

**4092**. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Démontrer que

$$\left[\frac{a^2+16a+80}{16\,(a+4)}+\frac{2}{\sqrt{2\,(b^2+16)}}\right]\left[\frac{b^2+16b+80}{16\,(b+4)}+\frac{2}{\sqrt{2\,(a^2+16)}}\right] \geq \frac{9}{4}$$

pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs. Quelles sont les conditions pour qu'il y ait égalité ?

**4093**. *Proposé par Dragolijub Milošević.*

Soit $ABC$ un triangle quelconque. Soit $r$ le rayon du cercle inscrit dans le triangle et $R$ le rayon du cercle circonscrit au triangle. Soit $m_a$ la longueur de la médiane du sommet $A$ au côté $BC$ et $w_a$ la longueur de la bissectrice de l'angle $A$ jusqu'au côté $BC$. Les longueurs $m_b, m_c, w_b$ et $w_c$ sont définies de la même façon. Démontrer que

$$\frac{a^2}{m_a w_a}+\frac{b^2}{m_b w_b}+\frac{c^2}{m_c w_c} \leq 4\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

**4094**. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels tels que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Démontrer que

$$n-1+\cosh\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\cosh x_k \leq n-1+\cosh\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right).$$

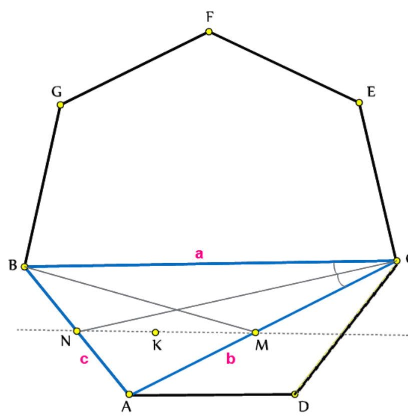
**4095**. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit $a, b$ et $c$ des réels positifs tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Démontrer que

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)+4abc.$$

**4096**. *Proposé par Abdilkadir Altintaş.*

Soit $ABC$ un triangle heptagonal, $BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$. Soit $CN$ la bissectrice de l'angle $BCA$ et $BM$ la médiane issue du sommet $B$, $N$ et $M$ étant des points sur les côtés respectifs $AB$ et $AC$. Soit $K$ le point de Lemoine (point d'intersection des symédianes) du triangle $ABC$. Démontrer que les points $N, K$ et $M$ sont alignés.




**4097**. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Soit $a_i$ des réels, $1 \leq i \leq 6$, tels que

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = \frac{15}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{6} a_i^2 = \frac{45}{4}.$$

Démontrer que $\prod_{i=1}^{6} a_i \leq \dfrac{5}{2}$.

**4098**. *Proposé par Ardak Mirzakhmedov.*

Soit $\alpha, \beta$ et $\gamma$ des angles aigus tels que $\alpha+\beta=\gamma$. Démontrer que

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 \geq 2\sqrt{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

**4099**. *Proposé par Lorian Saceanu.*

Soit $ABC$ un triangle acutangle. Les bissectrices des angles $A$, $B$ et $C$ coupent les côtés du triangle $ABC$ aux points respectifs $A'$, $B'$ et $C'$ et elles coupent le cercle circonscrit au triangle $ABC$ aux points respectifs $L$, $M$ et $N$. Soit $I$ le point d'intersection de ces bissectrices. Démontrer que :

a) $\dfrac{AI}{IL} = \dfrac{IA'}{A'L}$,

b) $\sqrt{\dfrac{AI}{IL}} + \sqrt{\dfrac{BI}{IM}} + \sqrt{\dfrac{CI}{IN}} \geq 3.$

**4100**. *Proposé par Daniel Sitaru et Leonard Giugiuc.*

Soit $ABC$ un triangle quelconque avec $\angle A < 90°$. Soit $S$ l'aire du triangle, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Démontrer que

$$\frac{c\cos B}{ac+2S} + \frac{b\cos C}{ab+2S} < \frac{a}{2S}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**4091**. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Find the greatest positive number $k$ such that

$$a+b+c+3k-3 \geq k\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right)$$

for any positive numbers $a$, $b$ and $c$ with $abc = 1$.

**4092**. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Show that

$$\left[\frac{a^2+16a+80}{16\,(a+4)} + \frac{2}{\sqrt{2\,(b^2+16)}}\right]\left[\frac{b^2+16b+80}{16\,(b+4)} + \frac{2}{\sqrt{2\,(a^2+16)}}\right] \geq \frac{9}{4}$$

for all $a, b > 0$. When does equality hold ?

**4093**. *Proposed by Dragolijub Milošević.*

Let $ABC$ be an arbitrary triangle. Let $r$ and $R$ be the inradius and the circumradius of $ABC$, respectively. Let $m_a$ be the length of the median from vertex $A$ to side $BC$ and let $w_a$ be the length of the internal bisector of $\angle A$ to side $BC$. Define $m_b, m_c, w_b$ and $w_c$ similarly. Prove that

$$\frac{a^2}{m_a w_a} + \frac{b^2}{m_b w_b} + \frac{c^2}{m_c w_c} \leq 4\left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

**4094**. *Proposed by Michel Bataille.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be real numbers such that $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Prove that

$$n - 1 + \cosh\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \cosh x_k \leq n - 1 + \cosh\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

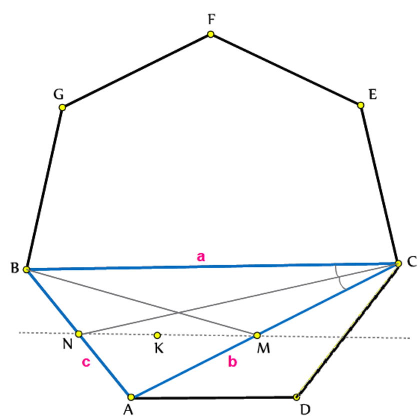
**4095**. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let $a, b$ and $c$ be positive real numbers with $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Prove that

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc.$$

**4096**. *Proposed by Abdilkadir Altintaş.*

Let $ABC$ be a heptagonal triangle with $BC = a$, $AC = b$ and $AB = c$. Suppose $CN$ is the internal angle bisector of $\angle BCA$, $BM$ is the median of triangle $ABC$ and $K$ is the symmedian point of $ABC$. Show that $N, K$ and $M$ are collinear.




**4097**. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Let $a_i, 1 \leq i \leq 6$ be real numbers such that

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = \frac{15}{2} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{6} a_i^2 = \frac{45}{4}.$$

Prove that $\prod_{i=1}^{6} a_i \leq \dfrac{5}{2}$.

**4098**. *Proposed by Ardak Mirzakhmedov.*

Let $\alpha, \beta$ and $\gamma$ be acute angles such that $\alpha + \beta = \gamma$. Show that

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 \geq 2\sqrt{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}.$$

**4099**. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Let $ABC$ be an acute angle triangle. Suppose the internal bisectors of angles $A, B$ and $C$ intersect the sides of $ABC$ in points $A', B'$ and $C'$ and they intersect the circumcircle of $ABC$ in points $L, M$ and $N$ respectively. Let $I$ be the point of intersection of all internal bisectors. Show that :

a) $\dfrac{AI}{IL} = \dfrac{IA'}{A'L}$,

b) $\sqrt{\dfrac{AI}{IL}} + \sqrt{\dfrac{BI}{IM}} + \sqrt{\dfrac{CI}{IN}} \geq 3.$

**4100**. *Proposed by Daniel Sitaru and Leonard Giugiuc.*

Let $ABC$ be an arbitrary triangle with area $S$, $\angle A < 90^\circ$ and sides $BC = a$, $AC = b$ and $AB = c$. Show that

$$\frac{c\cos B}{ac + 2S} + \frac{b\cos C}{ab + 2S} < \frac{a}{2S}.$$