PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-psol@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays.*

Comment soumettre un problème. *Nous sommes surtout à la recherche de problèmes originaux, mais d'autres problèmes intéressants peuvent aussi être acceptables pourvu qu'ils ne soient pas trop connus et que leur provenance soit indiquée. Normalement, si l'on connaît l'auteur d'un problème, on ne doit pas le proposer sans lui en demander la permission. Les solutions connues doivent accompagner les problèmes proposés. Si la solution n'est pas connue, la personne qui propose le problème doit tenter de justifier l'existence d'une solution. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Proposition_Année_numéro *(exemple : Tremblay_Julie_Proposition_2014_4.tex, s'il s'agit du 4e problème proposé par Julie en 2014).*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er août 2015***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction remercie André Ladouceur d'avoir traduit les problèmes.

3931. *Proposé par Bill Sands.*

Deux épreuves de mathématiques ont été présentées aux élèves d'une classe. Chaque élève devait subir l'épreuve 1 ou l'épreuve 2, mais chacun pouvait subir les deux épreuves. Or, un quart des élèves qui ont subi l'épreuve 1 ont obtenu un A et un tiers des élèves qui ont subi l'épreuve 2 ont obtenu un A. Le nombre d'élèves ayant obtenu un A dans l'épreuve 1 est le même que le nombre d'élèves ayant obtenu un A dans l'épreuve 2. De plus, la moitié des élèves de la classe ont obtenu un A dans au moins une des deux épreuves. Démontrer que

a) chaque élève de la classe a subi l'épreuve 1 et

b) aucun élève a obtenu un A dans les deux épreuves.

3932. *Proposé par Arkady Alt.*

Soit x et y deux entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $x^2 - 14xy + y^2 - 4x = 0$. Déterminer le PGCD$(x, y)$ en fonction de x et de y.

3933. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

Soit $ABCDEFG$ un heptagone régulier. Démontrer que

$$\frac{AD^3}{AB^3} - \frac{AB + 2AC}{AD - AC} = 1.$$

3934. *Proposé par George Apostolopolous.*

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Démontrer que

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4b^3 + 4c^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{4a^3 + 4c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{4a^3 + 4b^3}} < 2.$$

3935. *Proposé par Michel Bataille.*

Pour tout entier strictement positif n, soit $P_n(x) = x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k (n-k+1) x^{n-k}$.

a) Démontrer que si $n \geq 3$, le polynôme P_n admet un seul zéro x_n dans l'intervalle $(1, \infty)$ et déterminer des réels α, β tels que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - \alpha n) = \beta$.

b) Démontrer que pour tout entier n, $n \geq 2$,

$$1 - \frac{1}{4n^2} < x_{2n+1} - x_{2n} < 1 + \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{2n-1} < x_{2n} - x_{2n-1} < 1 + \frac{1}{4n^2}.$$

3936. *Proposé par Paul Bracken.*

Soit p un entier, $p \geq 1$, et soit $\{x_k\}_{k=1}^{n} \in (0, 1)$. Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k^p) \leq e^{-(p+1)^{1/p} \sum_{k=1}^{n} x_k^{p+1}}.$$

3937. *Proposé par Marcel Chiriţă.*

Les sommets d'un triangle sont représentés par les nombres complexes a, b et c. Démontrer que si

$$\frac{a-b}{c-b} + \frac{c-a}{b-a} = 2\frac{b-c}{a-c},$$

le triangle est équilatéral.

3938. *Proposé par Francisco Javier García Capitán.*

Soit un triangle ABC et un cercle O. Déterminer un point P sur O pour lequel l'expression $PA^2 + PB^2 + PC^2$ a une valeur minimale et un autre point P sur O pour lequel l'expression a une valeur maximale.

3939. *Proposé par George Apostolopolous.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 27$. Démontrer que

$$\sum_{\text{cycl}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 9}} \leq 3.$$

3940. *Proposé par Michał Kremzer.*

Déterminer des réels strictement positifs a et b tels que $\dfrac{a+b}{a(\tan a + \tan b)} = 2015.$

. . . .

3931. *Proposed by Bill Sands.*

A class is given two math tests. Each student in the class must write either Test 1 or Test 2 , but could write both tests. It turned out that one-quarter of the students who wrote Test 1 got an A, that one-third of the students who wrote Test 2 got an A, and that the same number of students got A on the two tests. Also, one-half of all the students in the class got an A on at least one of the two tests. Prove that

a) every student wrote Test 1, and

b) no student got A on both tests.

3932. *Proposed by Arkady Alt.*

Let x and y be natural numbers satisfying equation $x^2 - 14xy + y^2 - 4x = 0$. Find $\gcd(x, y)$ in terms of x and y.

3933. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

Let $ABCDEFG$ be a regular heptagon. Prove that

$$\frac{AD^3}{AB^3} - \frac{AB + 2AC}{AD - AC} = 1.$$

3934. *Proposed by George Apostolopolous.*

Let a, b and c be the side lengths of a triangle. Prove that

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4b^3 + 4c^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{4a^3 + 4c^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{4a^3 + 4b^3}} < 2.$$

3935. *Proposed by Michel Bataille.*

For positive integers n, let $P_n(x) = x^n + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(n-k+1)x^{n-k}$.

a) Prove that if $n \geq 3$, the polynomial P_n has a unique zero x_n in $(1, \infty)$ and find real numbers α, β such that $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \alpha n) = \beta$.

b) Prove that for all integers $n \geq 2$:

$$1-\frac{1}{4n^2} < x_{2n+1}-x_{2n} < 1+\frac{1}{2n+1} \quad \text{and} \quad 1-\frac{1}{2n-1} < x_{2n}-x_{2n-1} < 1+\frac{1}{4n^2}.$$

3936. *Proposed by Paul Bracken.*

Let $p \geq 1$ and suppose $\{x_k\}_{k=1}^n \in (0,1)$. Prove that

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k^p) \leq e^{-(p+1)^{1/p}\sum_{k=1}^n x_k^{p+1}}.$$

3937. *Proposed by Marcel Chiriţă.*

If the vertices of a triangle are represented by the complex numbers a, b, c, and these numbers satisfy

$$\frac{a-b}{c-b}+\frac{c-a}{b-a}=2\frac{b-c}{a-c},$$

then prove that the triangle is equilateral.

3938. *Proposed by Francisco Javier García Capitán, modified by the editor.*

Let ABC be a triangle, O a circle and P a point on O. Find two points on O for which the sum $PA^2 + PB^2 + PC^2$ reaches its minimum and its maximum.

3939. *Proposed by George Apostolopolous.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 27$. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{\sqrt{a^2-3a+9}} \leq 3.$$

3940. *Proposed by Michał Kremzer.*

Find positive a and b so that $\dfrac{a+b}{a(\tan a + \tan b)} = 2015$.