THE OLYMPIAD CORNER

No. 322

Nicolae Strungaru and Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-olympiad@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er août 2015** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le franais précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, d'avoir traduit les problèmes.

OC176. Résoudre l'équation

$$y = 2x^2 + 5xy + 3y^2,$$

où x et y sont entiers.

OC177. Pour chaque entier positif a, définissons $M(a)$ comme étant le nombre d'entiers positifs b tels que $a + b$ divise ab. Déterminer tout entier(s) a tel(s) que $1 \leq a \leq 2013$ et tel(s) que $M(a)$ atteint la plus grande valeur possible pour a dans ce domaine.

OC178. Déterminer tous les ensembles S d'entiers tels que $3m - 2n \in S$ pour tout $m, n \in S$.

OC179. Déterminer la valeur maximale de

$$|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ac + 1| + |c^2 - ba + 1|,$$

où a, b, c sont des nombres réels dans $[-2, 2]$.

OC180. Dans un triangle aigü ABC, soient O le centre du cercle circonscrit, G le centroïde et H l'orthocentre. Soit D un point sur BC tel que OD est perpendiculaire à BC, et soit E un point sur CA tel que HE est perpendiculaire à CA. Soit F le mi point de AB. Si les triangles ODC, HEA et GFB ont la même surface, déterminer toute les valeur possible de l'angle $\angle C$.

. . . .

OC176. Solve the equation

$$y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$$

for x and y integers.

OC177. For any positive integer a, define $M(a)$ to be the number of positive integers b for which $a + b$ divides ab. Find all integer(s) a with $1 \leq a \leq 2013$ such that $M(a)$ attains the largest possible value in the range of a.

OC178. Find all nonempty sets S of integers such that $3m - 2n \in S$ for all $m, n \in S$.

OC179. Find the maximum value of

$$|a^2 - bc + 1| + |b^2 - ac + 1| + |c^2 - ba + 1|$$

where a, b, c are real numbers in $[-2, 2]$.

OC180. In an acute triangle ABC, let O be its circumcentre, G be its centroid and H be its orthocentre. Let D be a point on BC with OD perpendicular to BC and E a point on CA with HE perpendicular to CA. Let F be the midpoint of AB. If triangles ODC, HEA and GFB have the same area, find all possible values of the angle $\angle C$.