PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-psol@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Comment soumettre un problème. *Nous sommes surtout à la recherche de problèmes originaux, mais d'autres problèmes intéressants peuvent aussi être acceptables pourvu qu'ils ne soient pas trop connus et que leur provenance soit indiquée. Normalement, si l'on connaît l'auteur d'un problème, on ne doit pas le proposer sans lui en demander la permission. Les solutions connues doivent accompagner les problèmes proposés. Si la solution n'est pas connue, la personne qui propose le problème doit tenter de justifier l'existence d'une solution. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Proposition_Année_numéro *(exemple : Tremblay_Julie_Proposition_2014_4.tex, s'il s'agit du 4e problème proposé par Julie en 2014).*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er juin 2015***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

Un astérisque ($\star$) signale un problème proposé sans solution.

La rédaction remercie Rolland Gaudet, University College of Saint Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

3911. *Proposé par Paul Bracken.*

Soit $x_0 \in (0, 1 - 1/a]$, où $a > 1$, et soit la suite définie par $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que x_n satisfait les inégalités

$$\frac{x_0}{anx_0 + 1} < x_n < \frac{x_0}{nx_0 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3912. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle scalène aucun angle rectangle et soit H son orthocentre. Si A_1, B_1 et C_1 sont les mi points de BC, CA et AB respectivement, démontrer que les orthocentres de HAA_1, HBB_1 et HCC_1 sont colinéaires.

3913. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Calculer

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dxdy}{(e^x + e^y)^2}.$$

3914. *Proposé par George Apostolopoulos; generalisé par le comité de rédaction.*

Soit ABC un triangle avec R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit et s le semi périmtre, tels que $s = kr$. Démontrer que $\frac{2k}{3\sqrt{3}} < \frac{R}{r} < \frac{k^2-3}{12}$.

3915. *Proposé par Marcel Chiriţă.*

Soient M et N des points sur les côtés AB et AC, respectivement, du triangle ABC, et posons $O = BN \cap CM$. Démontrer qu'il y a un nombre infini d'exemples (pas affinement équivalents) tels que les surfaces des quatre régions MBO, BCO, CNO et $AMON$ sont toutes entières.

3916. *Proposé par Nathan Soedjak.*

Soient a, b, c des nombres réels positifs. Démontrer que

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3\left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^2.$$

3917. *Proposé par Peter Y. Woo.*

À partir d'un cercle Z, son centre O et un point A sur Z, et à l'aide d'une longue règle non graduée, pouvez-vous dessiner:

i) des points B,C et D sur Z, tels que $ABCD$ ets un carreé?

ii) le carreé $AOBA'$?

iii) les points B, W'', W et W' sur Z tels que les angles AOB, AOW'', AOW et AOW' sont $90°, 60°, 45°$ and $30°$?

3918. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Démontrer que

$$\sqrt{(ab)^{2/3} + (bc)^{2/3} + (ac)^{2/3}} < \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

3919. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Le segment AI rencontre le cercle inscrit à M; la perpendiculaire à AM au point M intersecte BI à N. Si P est un point sur la ligne AI, démontrer que PC est perpendiculaire à AI si et seulement si PN est parallèle à BM.

3920. *Proposé par Alina Sîntămărian.*

Évaluer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16n^2+20n+7}{(4n+2)!}.$$

. . . .

3911. *Proposed by Paul Bracken.*

Let $x_0 \in (0, 1-1/a]$, where $a > 1$, and define the sequence $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$ for $n \in \mathbb{N}$. Prove that x_n satisfies the inequalities

$$\frac{x_0}{anx_0+1} < x_n < \frac{x_0}{nx_0+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3912. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a scalene triangle with no right angle and H as its orthocenter. If A_1, B_1 and C_1 are the midpoints of BC, CA and AB respectively, prove that the orthocenters of HAA_1, HBB_1 and HCC_1 are collinear.

3913. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Calculate

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dxdy}{(e^x+e^y)^2}.$$

3914. *Proposed by George Apostolopoulos; generalized by the Editorial Board.*

Let ABC be a triangle with circumradius R, inradius r and semiperimeter s, such that $s = kr$. Prove that $\dfrac{2k}{3\sqrt{3}} < \dfrac{R}{r} < \dfrac{k^2-3}{12}$.

3915. *Proposed by Marcel Chiriţă.*

Let M and N be points on the sides AB and AC, respectively, of triangle ABC, and define $O = BN \cap CM$. Show that there are infinitely many examples (that are not affinely equivalent) for which the areas of the four regions MBO, BCO, CNO and $AMON$ are all integers.

3916. *Proposed by Nathan Soedjak.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3\left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^2.$$

3917. *Proposed by Peter Y. Woo.*

Given a circle Z, its center O, and a point A on Z, with only a long unmarked ruler, and no compass, can you draw:

i) points B,C and D on Z so that $ABCD$ is a square?

ii) the square $AOBA'$?

iii) the points B, W'', W and W' on Z such that angles AOB, AOW'', AOW and AOW' are $90°, 60°, 45°$ and $30°$?

3918. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prove that

$$\sqrt{(ab)^{2/3} + (bc)^{2/3} + (ac)^{2/3}} < \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

3919. *Proposed by Michel Bataille.*

Let I be the incentre of triangle ABC. The line segment AI meets the incircle at M and the perpendicular to AM at M intersects BI at N. If P is a point of the line AI, prove that PC is perpendicular to AI if and only if PN is parallel to BM.

3920. *Proposed by Alina Sîntămărian.*

Evaluate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16n^2 + 20n + 7}{(4n+2)!}.$$