THE OLYMPIAD CORNER

No. 320

Nicolae Strungaru

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-olympiad@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er juin 2015** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le franais précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier d'avoir traduit les problèmes.

OC166. Soit $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\} = \{1, 2, \cdots, 10\}$. Déterminer la valeur maximale de

$$\sum_{n=1}^{10}(na_n^2 - n^2a_n)\,.$$

OC167. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que

$$(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x))$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

OC168. Soit $ABCD$ un carré. Déterminer tous les points P dans le plan, différents de A, B, C, D, tels que

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ\,.$$

OC169. Déterminer tous les entiers positifs $n \geq 2$ tels que, pour tous les entiers $0 \leq i, j \leq n$, les nombres $i + j$ et $\binom{n}{i} + \binom{n}{j}$ ont la même parité.

OC170. Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles $\angle CAB$ et $\angle ABC$ intersectent les segments BC et AC à D et E respectivement. Démontrer que

$$DE \leq (3 - 2\sqrt{2})(AB + BC + CA)\,.$$

. . . .

OC166. Let $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\} = \{1, 2, \cdots, 10\}$. Find the maximum value of

$$\sum_{n=1}^{10} (na_n^2 - n^2 a_n)\,.$$

OC167. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

OC168. Let $ABCD$ be a square. Find the locus of points P in the plane, different from A, B, C, D such that

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ\,.$$

OC169. Find all positive integers $n \geq 2$ such that for all integers $0 \leq i, j \leq n$ the numbers $i + j$ and $\binom{n}{i} + \binom{n}{j}$ have the same parity.

OC170. Let ABC be a triangle. The internal bisectors of angles $\angle CAB$ and $\angle ABC$ intersect segments BC, respectively AC at D, respectively E. Prove that

$$DE \leq (3 - 2\sqrt{2})(AB + BC + CA)\,.$$