THE CONTEST CORNER

No. 22

Robert Bilinski

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'un concours mathématique de niveau secondaire ou de premier cycle universitaire, ou en ont été inspirés. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-contest@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er juin 2015** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le franais précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

CC106. En chaque sommet d'un tétraèdre régulier de côté 3, on découpe une pyramide de façon que la surface de la découpe soit un triangle équilatéral. Les quatre triangles équilatéraux ainsi obtenus ont tous des dimensions différentes. Quelle est la longueur totale des arêtes du solide ainsi tronqué ?

CC107. Dans un triangle ABC rectangle en B tel que $BC = 1$, on place D sur le côté AC pour que $AD = AB = \frac{1}{2}$. Quelle est la longueur de DC ?

CC108. Dans un repère orthonormé, la droite $y = 5x$ coupe la parabole $y = x^2$ au point A. La perpendiculaire à OA en O coupe la parabole en B. Quelle est l'aire du triangle OAB ?

CC109. Soit E l'ensemble des réels x pour lesquels les deux membres de l'égalité sont définis :

$$\cot 8x - \cot 27x = \frac{\sin kx}{\sin 8x \sin 27x}.$$

Si cette égalité tient pour tous les x dans E, que vaut k ?

CC110. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation :

$$|1 + x - |x - |1 - x||| = | - x - |x - 1||.$$

. . . .

CC106. At each summit of a regular tetrahedron of side length 3, we cut off a pyramid such that the cut-off surface makes an equilateral triangle. The four equilateral triangles thus obtained have all different dimensions. What is the total length of the edges of the solid thus truncated ? Provide a proof.

CC107. In a right triangle ABC with right angle at B and $BC = 1$, we place D on side AC such that $AD = AB = \frac{1}{2}$. What is the length of DC ?

CC108. In an orthonormal system, the line with equation $y = 5x$ crosses the parabola with equation $y = x^2$ in point A. The perpendicular to OA at O intersects the parabola at B. What is the area of triangle AOB ?

CC109. Let E be the set of reals x for which the two sides of the following equality are defined :

$$\cot 8x - \cot 27x = \frac{\sin kx}{\sin 8x \sin 27x}.$$

If this equality holds for all the elements of E, what is the value of k ?

CC110. What is the number of real solutions to the equation :

$$|1 + x - |x - |1 - x||| = | - x - |x - 1||.$$

CONTEST CORNER SOLUTIONS

CC56. From the set of consecutive integers $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, three integers that form a geometric sequence are deleted. The sum of the integers remaining is 6125. Determine the smallest value of n and all three-term geometric sequences that make this possible.

Originally 1996 Invitational Mathematics Challenge, Grade 11, problem 5.

We present the solution by Konstantine Zelator.

We know that $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ and that a, ar, ar^2 are the terms of a geometric sequence. Thus $a+ar+ar^2+6125 = \frac{n(n+1)}{2}$ and $\frac{n(n+1)}{2} > 6125$. The smallest value of n which works is 111. This means that $a(1+r+r^2) = 91$. We have two cases.

Case 1 : r is a positive integer.

Then, both a and r^2+r+1 are natural numbers. Since $91=7\times 13$, we get the following : $a=1, r=9$, or $a=7, r=3$, or $a=13, r=2$.

Case 2 : $r>1$ and r is a fraction.

This means that $r=\frac{d}{c}$, where c and d are relatively prime positive integers with $c \geq 2$ and $d \geq 3$. Then $a(1+\frac{d}{c}+\frac{d^2}{c^2}) = 91$ or $a(d^2+cd+c^2) = 91c^2$.

Since ar^2 is an integer, we know $\frac{ad^2}{c^2}$ is an integer and because c does not divide d, c^2 divides a. Let $a=c^2k$ for some positive integer k. Then $k(d^2+cd+c^2) = 91$ and since we know $c \geq 2$ and $d \geq 3$ giving us $d^2+cd+c^2 \geq 19$. Thus $k=1$ and $d^2+cd+c^2 = 91$. The only solution is $d=6$ and $c=5$ and $a=25$.

Therefore there are four 3-term sequences that satisfy the conditions :

$$1, 9, 81 \qquad 7, 21, 63 \qquad 13, 26, 52 \qquad 25, 30, 36.$$

CC57. Triangle DEF is acute. Circle C_1 is drawn with DF as its diameter and circle C_2 is drawn with DE as its diameter. Points Y and Z are on DF and DE respectively so that EY and FZ are altitudes of ΔDEF. EY intersects C_1 at P, and FZ intersects C_2 at Q. EY extended intersects C_1 at R, and FZ extended intersects C_2 at S. Prove that P, Q, R, and S are concyclic points.

Originally 2002 Canadian Open Mathematics Challenge, problem B4.

Solved by M. Bataille ; S. Muralidharan ; and Z. Burnett. We present the solution by S. Muralidharan.

We will show that the points P, Q, R and S lie on a circle with centre D.

Let $\angle EDF$ be denoted by D, length $DF = y$ and length $DE = z$. Since DF is the diameter of the circle C_1 and EY is perpendicular to DF, it follows that $DP = DR$. Now, $DY = z\cos D$ and $O_1P = O_1D = \frac{y}{2}$. From the right-angled triangle PYO_1, we get :

$$PY^2 = O_1P^2 - O_1Y^2 = \frac{y^2}{4} - \left(\frac{y}{2} - z\cos D\right)^2 = yz\cos D - z^2\cos^2 D.$$

From right-angled triangle DPY, we have :

$$DP^2 = PY^2 + DY^2 = yz\cos D - z^2\cos^2 D + z^2\cos^2 D = yz\cos D.$$

Thus, we have $DP = DR = yz\cos D$.

By symmetry, if we use the above argument with the circle C_2, we get

$$DQ = DS = yz\cos D.$$

Thus P, Q, R and S lie on a circle with centre D and radius $yz\cos D$.

CC58. Find all real values of x, y and z such that

$$\begin{aligned} x - \sqrt{yz} &= 42 \\ y - \sqrt{zx} &= 6 \\ z - \sqrt{xy} &= -30\,. \end{aligned}$$

Originally problem B4 of 1997 Canadian Open Mathematics Challenge.

Solved by Š. Arslanagić; M. Bataille; M. Coiculescu; J. L. Díaz-Barrero; D. Văcaru; E. Wang; K. Zelator; and T. Zvonaru. We present the solution of Titu Zvonaru.

The first and second equation imply $x, y > 0$, then from $xz > 0$, we conclude $z > 0$. Hence we make a substitution $x = a^2, y = b^2, z = c^2$. Our system becomes

$$a^2 - bc = 42, \quad b^2 - ac = 6, \quad c^2 - ab = -30. \tag{1}$$

Subtracting the second equation from the first equation, and subtracting the third from the second gives us the following two equations :

$$(a-b)(a+b+c) = 36, \tag{2}$$

$$(b-c)(a+b+c) = 36. \tag{3}$$

Hence $a - b, b - c$ and $a + b + c$ are all non-zero and $a - b = b - c$. This implies $a = 2b - c$. Substituting this into (1) yields

$$4b^2 - 5bc + c^2 = 42, \tag{4}$$

$$b^2 - 2bc + c^2 = 6. \tag{5}$$

From (5), $b - c = \pm\sqrt{6}$, and hence from (4), $c = \pm\sqrt{6}$. We then conclude the solutions to the system (1) are

$$(-3\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, -\sqrt{6}),\ (3\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, \sqrt{6}),$$

which each yield $x = 54, y = 24, z = 6$.

CC59. Nine people are practicing the triangle dance, which is a dance that requires a group of three people. During each round of practice, the nine people split off into three groups of three people each, and each group practices independently. Two rounds of practice are different if there exists some person who does not dance with the same pair in both rounds. How many different rounds of practice can take place?

Originally Question 3 of 2013 Stanford Math Tournament, Team test.

One incorrect solution was received.

CC60. How many integer solutions are there to

$$a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2 + a_1a_2 + \cdots + a_{2009}a_{2010} + a_{2010}^2 = 1?$$

Originally 2010 APICS Math Competition, Question 5.

Solved by Richard Hess, whose solution we present below.

We consider the more general equation, where 2010 is replaced by an arbitrary n. Then, multiplying the equation by 2, we get

$$(0 + a_0)^2 + (a_0 + a_1)^2 + (a_1 + a_2)^2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)^2 + (a_n + 0)^2 = 2.$$

Define $b_0 = a_0$, $b_1 = a_0 + a_1$, $\cdots$, $b_k = a_{k-1} + a_k$, $\cdots$, $b_{n+1} = a_n$. Since our a_i are integers, so will the b_i. It follows that exactly two of the b_i will be nonzero. There are $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ many ways to choose $k < \ell$ so that $b_k, b_\ell \neq 0$.

Notice that $b_k^2, b_\ell^2 = 1$ so $b_k = \pm 1$. Notice that once we choose a_k then all other a_i are decided : $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k = -a_{k+1} = \cdots = (-1)^{\ell-k-1}a_{\ell-1}$, $a_\ell = \cdots = a_n = 0$. It follows then that $a_k = \pm 1$, so there are only two possible choices for a_k. So the total number of solutions is $N = 2\frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$.

Since $n = 2010$, we see that $N = 2011 \cdot 2012 = 4046132$.