PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. Nous préférons les réponses électroniques et demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats (Word, etc.) soient aussi acceptés. Nous invitons les lecteurs à envoyer leurs solutions au rédacteur à l'adresse* `crux-redacteurs@smc.math.ca`. *Nous acceptons aussi les contributions par la poste, envoyées à l'adresse figurant en troisième de couverture. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'tablissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page. Un astérisque ($\star$) signale un problème proposé sans solution.*

Nous sommes surtout à la recherche de problèmes originaux, mais d'autres problèmes intéressants peuvent aussi être acceptables pourvu qu'ils ne soient pas trop connus et que leur provenance soit indiquée. Normalement, si l'on connaît l'auteur d'un problème, on ne doit pas le proposer sans lui en demander la permission. Les solutions connues doivent accompagner les problèmes proposés. Si la solution n'est pas connue, la personne qui propose le problème doit tenter de justifier l'existence d'une solution. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_Proposition_Année_numéro *(exemple : Tremblay_Julie_Proposition_2014_4.tex, s'il s'agit du 4e problème proposé par Julie en 2014).*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er octobre 2014***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal d'avoir traduit les problèmes.

3851. *Proposé par Billy Jin, Waterloo Collegiate Institute, Waterloo, ON; et Edward T.H. Wang, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soit $U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$, et soit $S \subseteq U$ avec $|S| = k$ où $0 < k \leq n$.Trouver le nombre de paires non ordonnées (X, Y) telles que $S = X\Delta Y$ où X et Y sont des sous-ensembles de U, et $X\Delta Y = (X-Y)\cup(Y-X) = (X\cup Y)-(X\cap Y)$ est la différence symétrique de X and Y.

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2014

3852. *Proposé par Václav Konečný, Big Rapids, MI, É-U.*

On donne les graphes de deux fonctions f et g, positives, continues et croissantes, satisfaisant à $0 < f(x) < g(x)$ pour tout $x \geq 0$. On considère le système d'équations

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= K \\ g(x_1) + g(x_2) &= L. \end{aligned}$$

Si $x_1 > 0$ et $K > 0$ sont donnés, trouver $x_2 > 0$ et $L > 0$ via la construction classique grecque (avec la règle et le compas) de sorte que le système d'équation soit satisfait.

3853. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Soit a, b, c trois nombres réels positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$\frac{a}{b(2c+a)} + \frac{b}{c(2a+b)} + \frac{c}{a(2b+c)} \geq 1.$$

3854. *Proposé par Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, É-U.*

Montrer que la parabole tangente aux bissectrices interne et externe des angles B et C du triangle ABC a comme foyer le sommet A et comme directrice la droite BC.

3855. *Proposé par Leonard Giugiuc, Roumanie.*

Soit a et b deux nombres réels avec $0 < a < b$ et $\dfrac{1+ab}{b-a} \leq \sqrt{3}$. Montrer que

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geq 4a(a + b).$$

Quand y a-t-il égalité ?

3856. *Proposé par Nguyen Ngoc Giag, Vietnam Institute of Educational Sciences, Ha Noi, Vietnam.*

On donne un triangle ABC avec les bissectrices internes AA', BB', CC'. Les bissectrices CC' et BB' coupent respectivement $A'B'$ en F et $C'A'$ en E. Montrer que si $BE = CF$ alors le triangle ABC est isocèle.

3857. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit a, b, c trois nombres réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a^{n+2}}{a^n + (n-1)b^n} + \frac{b^{n+2}}{b^n + (n-1)c^n} + \frac{c^{n+2}}{c^n + (n-1)a^n} \geq \frac{3}{n}$$

pour chaque entier positif n.

3858. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit a, b deux nombres réels positifs avec $a \neq b$. Résoudre le système

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2a^2bx - 2ab^2y + a^2b^2 &= 0 \\ abx^2 + (a^2 - b^2)xy - aby^2 + ab^2x - a^2by &= 0 \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3859. *Proposé par Jung In Lee, École Secondaire Scientifique de Séoul, Séoul, République de Corée.*

On définit la suite $\{F_n\}$ par $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq 1$. Pour tout nombre naturel m, on définit $v_2(m)$ comme $v_2(m) = n$ if $2^n \mid m$ et $2^{n+1} \nmid m$. Trouver tous les nombres entiers positifs n satisfaisant l'équation

$$v_2(n!) = v_2(F_1F_2 \cdots F_n).$$

3860. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $n \geq 3$ un entier impair et soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que le déterminant de $3A + 4A^T$ est divisible par 7. Le résultat reste-t-il vrai si n est un entier pair ?

. . . .

3851. *Proposed by Billy Jin, Waterloo Collegiate Institute, Waterloo, ON; and Edward T.H. Wang, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Let $U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ where $n \in \mathbb{N}$, and let $S \subseteq U$ with $|S| = k$ where $0 < k \leq n$. Determine the number of unordered pairs (X, Y) such that $S = X\Delta Y$ where X and Y are subsets of U, and $X\Delta Y = (X-Y)\cup(Y-X) = (X\cup Y)-(X\cap Y)$ is the symmetric difference of X and Y.

3852. *Proposed by Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

Given the graphs of two positive, continuous, increasing functions f, g, satisfying $0 < f(x) < g(x)$ for all $x \geq 0$. Consider the following system of equations

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= K \\ g(x_1) + g(x_2) &= L. \end{aligned}$$

If $x_1 > 0$ and $K > 0$ are given, find $x_2 > 0$ and $L > 0$ by the Classical Greek construction (compass and straightedge) such that the system of equations is satisfied.

3853. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{a}{b(2c+a)} + \frac{b}{c(2a+b)} + \frac{c}{a(2b+c)} \geq 1.$$

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2014

3854. *Proposed by Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, USA.*

Show that the parabola tangent to the internal and external bisectors of angles B and C of triangle ABC has focus at vertex A and directrix the line BC.

3855. *Proposed by Leonard Giugiuc, Romania.*

Let a and b be real numbers with $0 < a < b$ and $\dfrac{1+ab}{b-a} \leq \sqrt{3}$. Prove that

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq 4a(a+b).$$

When does equality hold?

3856. *Proposed by Nguyen Ngoc Giag, Vietnam Institute of Educational Sciences, Ha Noi, Vietnam.*

Given a triangle ABC with internal angle bisectors AA', BB', CC'. Bisector CC' meets $A'B'$ at F, and bisector BB' meets $C'A'$ at E. Prove that if $BE = CF$ then triangle ABC is isosceles.

3857. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{a^{n+2}}{a^n + (n-1)b^n} + \frac{b^{n+2}}{b^n + (n-1)c^n} + \frac{c^{n+2}}{c^n + (n-1)a^n} \geq \frac{3}{n}$$

for each positive integer n.

3858. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let a, b be positive real numbers with $a \neq b$. Solve the system

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2a^2bx - 2ab^2y + a^2b^2 &= 0 \\ abx^2 + (a^2-b^2)xy - aby^2 + ab^2x - a^2by &= 0 \end{aligned}$$

for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3859. *Proposed by Jung In Lee, Seoul Science High School, Seoul, Republic of Korea.*

The sequence $\{F_n\}$ is defined by $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for $n \geq 1$. For any natural number m, define $v_2(m)$ as $v_2(m) = n$ if $2^n \mid m$ and $2^{n+1} \nmid m$. Find all positive integer n that satisfy the equation

$$v_2(n!) = v_2(F_1F_2\cdots F_n).$$

3860. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $n \geq 3$ be an odd integer and let $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Prove that the determinant of $3A + 4A^T$ is divisible by 7. Does the result hold when n is an even integer?