THE OLYMPIAD CORNER

No. 314

Nicolae Strungaru

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Nous préférons les réponses électroniques et demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_OCNuméro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_OC1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats (Word, etc.) soient aussi acceptés. Nous invitons les lecteurs à envoyer leurs solutions et réponses aux concours au rédacteur à l'adresse* `crux-olympiad@smc.math.ca`. *Nous acceptons aussi les contributions par la poste, envoyées à l'adresse figurant en troisième de couverture. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec* chaque *solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er octobre 2014** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, d'avoir traduit les problèmes.

OC136. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle avec centre O. Si $AB = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\angle AOB = 135°$, déterminer l'aire maximum possible pour $ABCD$.

OC137. On dénote par $S(k)$ la somme des chiffres dans la représentation décimale de k. Démontre qu'il y a infiniment d'entiers positifs n tels que

$$S(2^n + n) < S(2^n)\,.$$

OC138. Déterminer tous les entiers positifs $a, b, c, p \geq 1$ tels que p est premier et

$$a^p + b^p = p^c.$$

OC139. Les nombres $1, 2, \ldots, 50$ sont écrits au tableau. À chaque minute, deux de ces nombres sont effacés et sont remplacés par leur différence positive. À la fin, un seul nombre demeure. Déterminer toutes les valeurs possibles pour ce nombre.

OC140. Soit ABC un triangle obtus avec $\angle A > 90°$ et avec cercle circonscrit Γ. Le point D se trouve sur le segment AB de façon à ce que $AD = AC$. Soit AK le diamètre de Γ et soit L le point d'intersection de AK et CD. Un cercle passant par D, K et L intersècte Γ à $P \neq K$. Étant donné que $AK = 2$, $\angle BCD = \angle BAP = 10°$, démontrer que

$$DP = \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right).$$

. . . .

OC136. Quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with centre O. If $AB = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ and $\angle AOB = 135°$, find the maximum possible area of $ABCD$.

OC137. We denote by $S(k)$ the sum of the digits in the decimal representation of k. Prove that there are infinitely many positive integers n for which

$$S(2^n + n) < S(2^n).$$

OC138. Find all positive integers $a, b, c, p \geq 1$ such that p is a prime and

$$a^p + b^p = p^c.$$

OC139. The numbers $1, 2, \ldots, 50$ are written on a blackboard. Each minute any two numbers are erased and their positive difference is written instead. At the end one number remains. Find all the values this number can take.

OC140. Let ABC be an obtuse triangle with $\angle A > 90°$ and circumcircle Γ. Point D is on the segment AB such that $AD = AC$. Let AK be a diameter of Γ, and let L be the point of intersection of AK and CD. A circle passing through D, K, L intersects Γ at $P \neq K$. Given that $AK = 2$, $\angle BCD = \angle BAP = 10°$, prove that

$$DP = \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right).$$