# THE OLYMPIAD CORNER

## No. 314

Nicolae Strungaru

*Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Nous préférons les réponses électroniques et demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_OCNuméro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_OC1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats (Word, etc.) soient aussi acceptés. Nous invitons les lecteurs à envoyer leurs solutions et réponses aux concours au rédacteur à l'adresse* `crux-olympiad@smc.math.ca`*. Nous acceptons aussi les contributions par la poste, envoyées à l'adresse figurant en troisième de couverture. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec* chaque *solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

*Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le* **1er octobre 2014** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

*Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.*

*La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de l'Université Saint-Boniface à Winnipeg, d'avoir traduit les problèmes.*

**OC136**. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle avec centre $O$. Si $AB = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\angle AOB = 135°$, déterminer l'aire maximum possible pour $ABCD$.

**OC137**. On dénote par $S(k)$ la somme des chiffres dans la représentation décimale de $k$. Démontre qu'il y a infiniment d'entiers positifs $n$ tels que

$$S(2^n + n) < S(2^n)\,.$$

**OC138**. Déterminer tous les entiers positifs $a, b, c, p \geq 1$ tels que $p$ est premier et

$$a^p + b^p = p^c.$$

**OC139**. Les nombres $1, 2, \ldots, 50$ sont écrits au tableau. À chaque minute, deux de ces nombres sont effacés et sont remplacés par leur différence positive. À la fin, un seul nombre demeure. Déterminer toutes les valeurs possibles pour ce nombre.

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2014

**OC140**. Soit $ABC$ un triangle obtus avec $\angle A > 90°$ et avec cercle circonscrit $\Gamma$. Le point $D$ se trouve sur le segment $AB$ de façon à ce que $AD = AC$. Soit $AK$ le diamètre de $\Gamma$ et soit $L$ le point d'intersection de $AK$ et $CD$. Un cercle passant par $D$, $K$ et $L$ intersècte $\Gamma$ à $P \neq K$. Étant donné que $AK = 2$, $\angle BCD = \angle BAP = 10°$, démontrer que

$$DP = \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**OC136**. Quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with centre $O$. If $AB = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ and $\angle AOB = 135°$, find the maximum possible area of $ABCD$.

**OC137**. We denote by $S(k)$ the sum of the digits in the decimal representation of $k$. Prove that there are infinitely many positive integers $n$ for which

$$S(2^n + n) < S(2^n).$$

**OC138**. Find all positive integers $a, b, c, p \geq 1$ such that $p$ is a prime and

$$a^p + b^p = p^c.$$

**OC139**. The numbers $1, 2, \ldots, 50$ are written on a blackboard. Each minute any two numbers are erased and their positive difference is written instead. At the end one number remains. Find all the values this number can take.

**OC140**. Let $ABC$ be an obtuse triangle with $\angle A > 90°$ and circumcircle $\Gamma$. Point $D$ is on the segment $AB$ such that $AD = AC$. Let $AK$ be a diameter of $\Gamma$, and let $L$ be the point of intersection of $AK$ and $CD$. A circle passing through $D$, $K$, $L$ intersects $\Gamma$ at $P \neq K$. Given that $AK = 2$, $\angle BCD = \angle BAP = 10°$, prove that

$$DP = \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right).$$

# OLYMPIAD SOLUTIONS

**OC76**. For any positive integer $n$, let $a_n$ be the exponent of the largest power of 2 which occurs as a factor of $5^n - 3^n$. Also, let $b_n$ be the exponent of the largest power of 2 which divides $n$. Show that

$$a_n \leq b_n + 3$$

for all $n$.
(*Originally question 1 from the 2011 British IMO selection, Day 2.*)

*Solved by Chip Curtis, Missouri Southern State University, Joplin, MO, USA; Oliver Geupel, Brühl, NRW, Germany; David E. Manes, SUNY at Oneonta, Oneonta, NY, USA; Norvald Midttun, Royal Norwegian Naval Academy, Sjøkrigsskolen, Bergen, Norway; Daniel Văcaru, Piteşti, Romania; and Konstantine Zelator, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA, USA. We give the solution of Midttun.*

If $n$ is odd, then

$$5^n - 3^n \equiv 1 - 3 \equiv 2 \pmod{4}\ .$$

Therefore $a_n = 1$ and $b_n = 0$, thus the inequality holds.

Now, let $n = 2^m \cdot q$ with $q$ odd and $m \geq 1$. Then

$$\begin{aligned}
5^{2^m\cdot q} - 3^{2^m\cdot q} &= \left(5^{2^{m-1}\cdot q} + 3^{2^{m-1}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-1}\cdot q} - 3^{2^{m-1}\cdot q}\right)\\
&= \left(5^{2^{m-1}\cdot q} + 3^{2^{m-1}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-2}\cdot q} + 3^{2^{m-2}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-2}\cdot q} - 3^{2^{m-2}\cdot q}\right)\\
&\ \vdots\\
&= \left(5^{2^{m-1}\cdot q} + 3^{2^{m-1}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-2}\cdot q} + 3^{2^{m-2}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-3}\cdot q} + 3^{2^{m-3}\cdot q}\right)\times\\
&\qquad \cdots\left(5^{2\cdot q} + 3^{2\cdot q}\right)(5^q + 3^q)(5^q - 3^q) \quad (1)
\end{aligned}$$

As all odd perfect squares are congruent to 1 (mod 4) we have

$$\begin{aligned}
5^{2^{m-1}\cdot q} + 3^{2^{m-1}\cdot q} &\equiv 5^{2^{m-2}\cdot q} + 3^{2^{m-2}\cdot q}\\
&\equiv 5^{2^{m-3}\cdot q} + 3^{2^{m-3}\cdot q} \equiv \cdots \equiv 5^{2\cdot q} + 3^{2\cdot q} \equiv 2 \pmod{4}
\end{aligned}$$

Therefore, the exponent of the largest power of 2 that divides

$$\left(5^{2^{m-1}\cdot q} + 3^{2^{m-1}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-2}\cdot q} + 3^{2^{m-2}\cdot q}\right)\left(5^{2^{m-3}\cdot q} + 3^{2^{m-3}\cdot q}\right)\cdots\left(5^{2\cdot q} + 3^{2\cdot q}\right)$$

is $m - 2$.

Since $q$ is odd, we have exactly as in the first part of the proof

$$5^q - 3^q \equiv 2 \pmod{4}\ .$$

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2014

We claim that

$$5^q + 3^q \equiv 8 \pmod{16} .$$

Indeed, let $q = 2k+1$. Then

$$5^{2k+1} + 3^{2k+1} \equiv 5 \cdot 25^k + 3 \cdot 9^k \equiv 5 \cdot 9^k + 3 \cdot 9^k \equiv 8 \cdot 9^k \equiv 8 \pmod{16} .$$

This shows that in this case $a_n = b_n + 3$.

**OC77**. Find all functions $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ so that for all $x, y \in (0,\infty)$ we have

$$f(x)f(y) = f(y)f\left(xf(y)\right) + \frac{1}{xy} .$$

(*Originally question 6 from the 2011 Czech Republic Mathematical Olympiad.*)

*Solved by Michel Bataille, Rouen, France.*

It is easy to check that $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ is a solution. We show that there is no other solution.

Let $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ be any solution. Replacing $x$ by $\dfrac{x}{f(y)}$ we get

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = f(x) + \frac{1}{xy} \tag{2}$$

therefore

$$f\left(\frac{1}{f(y)}\right) = a + \frac{1}{y} \tag{3}$$

where $a = f(1)$. It follows from (3) that $f$ is injective.

Setting $y = 1$ in (3) we get

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = a + 1 \tag{4}$$

while setting $y = 1, x = \dfrac{1}{a}$ in (2) yields

$$f\left(\frac{1}{a^2}\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + a \tag{5}$$

therefore

$$f\left(\frac{1}{a^2}\right) = 2a + 1 .$$

On another hand, setting $y = \dfrac{1}{a+1}$ in (3) yields

$$f\left(\frac{1}{f(\frac{1}{a+1})}\right) = 2a + 1 .$$

As $f$ is injective, we get
$$f\left(\frac{1}{a+1}\right) = a^2$$
therefore
$$f\left(\frac{1}{f(a)}\right) = a^2\,.$$
Setting $y = \dfrac{1}{a}$ in (3) yields
$$f\left(\frac{1}{f(\frac{1}{a})}\right) = 2a\,. \tag{6}$$
This shows that $a^2 = 2a$ and hence, as $a = f(1) > 0$ we get $a = 2$.

Now, replacing $x$ by $\dfrac{1}{f(x)}$ and $y$ by 1 in the original relation we get
$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(\frac{2}{f(x)}\right) + \frac{f(x)}{2}\,.$$
Now, combining (3) with $a = 2$ we have
$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 2 + \frac{1}{x}\,.$$
Moreover, from (2) we get
$$f\left(\frac{2}{f(x)}\right) = f(2) + \frac{1}{2x}\,.$$
Therefore
$$2 + \frac{1}{x} = f(2) + \frac{1}{2x} + \frac{f(x)}{2}$$
or
$$f(x) = 4 - 2f(2) + \frac{1}{x}\,.$$

Now, setting in the given relation $x = y = 1$ we get
$$2^2 = 2f(2) + 1 \Rightarrow 2f(2) = 3\,,$$
which shows that
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\,.$$
This completes the proof.

Copyright © Canadian Mathematical Society, 2014

**OC78**. Let $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 14, a_4 = 19, \ldots$ be the sequence of positive integers starting with 1, followed by all integers with the sum of the digits divisible by 5. Prove that for all $n$ we have

$$a_n \leq 5n\,.$$

(*Originally question 4 from 2011 Kazahstan National Olympiad, Grade 9.*)

*Solved by Oliver Geupel, Brühl, NRW, Germany; and Daniel Văcaru, Piteşti, Romania. There was one incomplete solution. We give the writeup from Geupel.*

For any positive integer $n$, define the set

$$A_n = \{5n-5,\ 5n-4,\ 5n-3,\ 5n-2,\ 5n-1\}.$$

We have $a_1 \in A_1$.

Moreover, for each $n \geq 2$, the elements in $A_n$ only differ in the last digit, thus the sums of digits of the members of $A_n$ are in distinct residue classes modulo 5.

Therefore, exactly one member of each $A_n$ has a sum of digits that is divisible by 5. Consequently, $a_n \in A_n$ for $n = 1, 2, \ldots$, which implies

$$a_n \leq \max A_n = 5n - 1.$$

This completes the proof.

**OC79**. Let $D$ be a point different from the vertices on the side $BC$ of a $\Delta ABC$. Let $I, I_1$ and $I_2$ be the incenters of $\Delta ABC, \Delta ABD$ respectively $\Delta ADC$. Let $E$ be the second intersection point of the circumcircles of $\Delta AI_1I$ and $\Delta ADI_2$, and let $F$ be the second intersection point of the circumcircles of $\Delta AII_2$ and $\Delta AI_1D$. If $AI_1 = AI_2$, prove that

$$\frac{EI}{FI} \cdot \frac{ED}{FD} = \frac{{EI_1}^2}{{FI_2}^2}\,.$$

(*Originally question 1 from the 2011 Turkey Team Selection Test, Day 2.*)

*No solution to this problem was received.*

**OC80**. Let $G$ be a simple graph with $3n^2$ vertices ($n \geq 2$), such that the degree of each vertex of $G$ is not greater than $4n$, there exists at least one vertex of degree one, and between any two vertices, there is a path of length $\leq 3$. Prove that the minimum number of edges that $G$ might have is equal to $\dfrac{7n^2 - 3n}{2}$. (*Originally question 3 from 2011 China Team Selection Test, Quiz 3, Day 1.*)

*No solution to this problem was received.*