THE CONTEST CORNER

No. 16

Shawn Godin

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'un concours mathématique de niveau secondaire ou de premier cycle universitaire, ou en ont été inspirés. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Nous préférons les réponses électroniques et demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante : Nom de famille_Prénom_CCNuméro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_CC1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats (Word, etc.) soient aussi acceptés. Nous invitons les lecteurs à envoyer leurs solutions et réponses aux concours au rédacteur à l'adresse* `crux-contest@smc.math.ca`. *Nous acceptons aussi les contributions par la poste, envoyées à l'adresse figurant en troisième de couverture. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er octobre 2014** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le franais précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de Université de Saint-Boniface, Winnipeg, MB, d'avoir traduit les problèmes.

CC76. Le point $P(a,b)$ est situé dans le premier quadrant. Une droite passant par P coupe les axes aux points Q et R de manière que le triangle OQR ait une aire de $2ab$, O étant l'origine. Démontrer qu'il y a trois droites possibles qui satisfont à cette condition.

CC77. Trois cercles sont tangents l'un à l'autre. Le premier cercle a pour rayon a, le deuxième a pour rayon b et le troisième a pour rayon $a+b$, a et b étant des nombres réels et $a, b > 0$. Déterminer le rayon d'un quatrième cercle tangent à chacun de ces trois cercles.

CC78. Soit $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, p, q et r étant des entiers. Démontrer que si $g(0)$ et $g(1)$ sont tous deux impairs, alors l'équation $g(x) = 0$ ne peut admettre trois racines entières.

CC79. Démontrer que si n est un entier supérieur à 1, alors $n^4 + 4$ n'est pas un nombre premier.

CC80. Alphonse et Bérénice s'amusent avec n coffres-forts. Chaque coffre-fort peut être ouvert à l'aide d'une clé unique et chaque clé peut ouvrir un seul coffre-fort. Bérénice mêle les n clés au hasard, place une clé à l'intérieur de chaque coffre-fort, puis elle ferme chaque coffre-fort à l'aide de sa passe-partout. Alphonse choisit ensuite m coffres-forts ($m < n$) et Bérénice ouvre ces m coffres-forts à l'aide de la passe-partout. Alphonse prend les clés à l'intérieur de ces m coffres-forts et tente d'ouvrir les $n - m$ autres coffres-forts à l'aide de ces clés. Chaque fois qu'il réussit à ouvrir un coffre-fort, il peut utiliser la clé à l'intérieur de celui-ci pour tenter d'en ouvrir un autre. Il continue jusqu'à ce qu'il ait ouvert tous les coffres-forts ou qu'il ne puisse plus en ouvrir un autre. Soit $P_m(n)$ la probabilité pour qu'Alphonse puisse ouvrir tous les n coffres-forts à partir des m clés disponibles lors de son choix de m coffres-forts. Déterminer une formule pour $P_2(n)$.

. . . .

CC76. The point $P(a, b)$ lies in the first quadrant. A line, drawn through P, cuts the axes at Q and R such that the area of triangle OQR is $2ab$, where O is the origin. Prove that there are three such lines that satisfy these criteria.

CC77. The three following circles are tangent to each other: the first has radius a, the second has radius b, and the third has radius $a + b$ for some $a, b \in \mathbb{R}$ with $a, b > 0$. Find the radius of a fourth circle tangent to each of these three circles.

CC78. Let $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, where p, q and r are integers. Prove that if $g(0)$ and $g(1)$ are both odd, then the equation $g(x) = 0$ cannot have three integer roots.

CC79. Show that if n is an integer greater than 1, then $n^4 + 4$ is not prime.

CC80. Alphonse and Beryl play a game involving n safes. Each safe can be opened by a unique key and each key opens a unique safe. Beryl randomly shuffles the n keys, and after placing one key inside each safe, she locks all of the safes with her master key. Alphonse then selects m of the safes (where $m < n$), and Beryl uses her master key to open just the safes that Alphonse selected. Alphonse collects all of the keys inside these m safes and tries to use these keys to open up the other $n - m$ safes. If he can open a safe with one of the m keys, he can then use the key in that safe to try to open any of the remaining safes, repeating the process until Alphonse successfully opens all of the safes, or cannot open any more. Let $P_m(n)$ be the probability that Alphonse can eventually open all n safes starting from his initial selection of m keys. Determine a formula for $P_2(n)$.