PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 février 2014**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7, et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8, et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal d'avoir traduit les problèmes.

3771. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

(a) Trouver une infinité de paires (a, b) de nombres rationnels positifs telles que $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est une racine de $x^2 + ax - b$.

(b) Trouver deux entiers positifs a, b tels que $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est une racine de x^2+ax-b.

3772. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

On donne un carré $ABCD$ de côté a. Choisir respectivement des points K et L sur BC et CD de sorte que le périmètre de ΔKCL soit $2a$. Déterminer les mesures des angles de ΔAKL qui minimisent son aire.

3773. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit respectivement R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit d'un triangle de côtés a, b, c. Sous quelle condition sur les angles du triangle l'inégalité

$$a + b + c \leq 2\sqrt{3}(R + r)$$

est-elle respectée ?

3774. *Proposé par Pedro Henrique O. Pantoja, étudiant, UFRN, Brésil.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\frac{c(a^2+b^2)}{\sqrt{a^3+b^3}} + \frac{a(b^2+c^2)}{\sqrt{b^3+c^3}} + \frac{b(c^2+a^2)}{\sqrt{c^3+a^3}} \leq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2+a+b+c)\,.$$

3775. *Proposé par Marcel Chirita, Bucharest, Romainia.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $AC \perp BD$. Montrer que $ABCD$ est cyclique si et seulement si $BC{\cdot}AD = IA{\cdot}IB + IC{\cdot}ID$, où I est le point d'intersection des diagonales.

3776. *Proposé par Wei-Dong Jiang, Collège Professionnel de Weihai, Weihai, Province de Shandong, Chine.*

Montrer que dans le triangle ABC, on a

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\tan\left(\frac{B}{2}\right)+\tan\left(\frac{C}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\sec\left(\frac{A}{2}\right)+\sec\left(\frac{B}{2}\right)+\sec\left(\frac{C}{2}\right)\right).$$

3777. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit x, y et z trois nombres réels positifs tels que $xyz = 1$ et $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}=3$. Trouver toutes les valeurs possibles de $x^4+y^4+z^4$.

3778. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle $A_1A_2A_3$, γ son cercle inscrit, de centre I et de rayon r. Pour $i=1,2,3$, soit A_i' sur le côté A_iA_{i+1} et A_i'' sur le côté A_iA_{i+2} deux points tels que $A_i'A_i''\perp OA_i$ et que γ soit le cercle exinscrit du triangle $A_iA_i'A_i''$ correspondant à A_i, où $A_4=A_1$, $A_5=A_2$. Montrer que

(a) $A_1'A_1''\cdot A_2'A_2''\cdot A_3'A_3''=\dfrac{4a_1a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}\cdot r^2$

(b) $A_1'A_1''+A_2'A_2''+A_3'A_3''=\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1a_2a_3}\cdot IK^2+\dfrac{3a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

où a_1, a_2 et a_3 sont les longueurs des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et K est son point symédian.

3779★. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Dans un triangle ABC de demi-périmètre s, soit x, y et z les distances respectives du centre de gravité aux côtés BC, CA et AB. Démontrer ou réfuter la validité de l'inégalité

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\leq\frac{s}{\sqrt{3}}.$$

3780. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continuement différentiable et soit

$$x_n=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$.

. . . .

3771. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

(a) Find infinitely many pairs (a, b) of positive rational numbers so that $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ is a root of $x^2 + ax - b$.

(b) Find two positive integers a, b so that $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ is a root of $x^2 + ax - b$.

3772. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Given a square $ABCD$ with side length a. Points K and L are on BC and CD, respectively, such that the perimeter of ΔKCL is $2a$. Determine the measures of the angles of ΔAKL which minimize its area.

3773. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let R and r be the circumradius and the inradius of a triangle with sides a, b, c. Under which condition on the angles of the triangle does the inequality

$$a + b + c \leq 2\sqrt{3}(R + r)$$

hold?

3774. *Proposed by Pedro Henrique O. Pantoja, student, UFRN, Brazil.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{c(a^2+b^2)}{\sqrt{a^3+b^3}} + \frac{a(b^2+c^2)}{\sqrt{b^3+c^3}} + \frac{b(c^2+a^2)}{\sqrt{c^3+a^3}} \leq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2+a+b+c)\,.$$

3775. *Proposed by Marcel Chirita, Bucharest, Romainia.*

Let $ABCD$ be a quadrilateral with $AC \perp BD$. Show that $ABCD$ is cyclic if and only if $BC \cdot AD = IA \cdot IB + IC \cdot ID$, where I is the point of intersection of the diagonals.

3776. *Proposed by Wei-Dong Jiang, Weihai Vocational College, Weihai, Shandong Province, China.*

In ΔABC prove that

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sec\left(\frac{A}{2}\right) + \sec\left(\frac{B}{2}\right) + \sec\left(\frac{C}{2}\right)\right)\,.$$

3777. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let x, y, and z be positive real numbers such that $xyz = 1$ and $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} = 3$. Determine all possible values of $x^4 + y^4 + z^4$.

3778. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\Delta A_1A_2A_3$ be a triangle with circumcentre O, incircle γ, incentre I, and inradius r. For $i = 1, 2, 3$, let A'_i on side A_iA_{i+1} and A''_i on side A_iA_{i+2} be such that $A'_iA''_i \perp OA_i$ and γ is the A_i–excircle of $\Delta A_iA'_iA''_i$ where $A_4 = A_1$, $A_5 = A_2$. Prove that

(a) $A'_1A''_1 \cdot A'_2A''_2 \cdot A'_3A''_3 = \dfrac{4a_1a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2} \cdot r^2$

(b) $A'_1A''_1 + A'_2A''_2 + A'_3A''_3 = \dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1a_2a_3} \cdot IK^2 + \dfrac{3a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

where a_1, a_2, a_3 are the side lengths of $\Delta A_1A_2A_3$ and K is its symmedian point.

3779★. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let ΔABC have semi-perimeter s and let x, y, z be the distances from the centroid to the sides BC, CA, AB, respectively. Prove or disprove that

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \le \frac{s}{\sqrt{3}}\,.$$

3780. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function and let

$$x_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\,.$$

Calculate $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$.