THE OLYMPIAD CORNER

No. 306

Nicolae Strungaru

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 février 2014**.

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

OC96. Soient $a, b > 1$ deux entiers relativement premiers. On pose $x_1 = a$, $x_2 = b$ et

$$x_n = \frac{{x_{n-1}}^2 + {x_{n-2}}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}}$$

pour $n \geq 3$. Démontrer que x_n est entier pour aucune valeur $n \geq 3$.

OC97. Soit A un ensemble de 225 éléments. Supposons qu'il existe onze sous-ensembles $A_1, \ldots, A_{11}$ de A tels que $|A_i| = 45$ pour $1 \leq i \leq 11$ et $|A_i \cap A_j| = 9$ pour $1 \leq i < j \leq 11$. Dmontrer que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}| \geq 165$, et donner un exemple où l'égalité tient.

OC98. Soit ABC un triangle tel que $\angle BAC = 60°$. Soient B_1 et C_1 les pieds des bissectrices partant de B et C. Soit A_1 symétrique à A par rapport à la ligne B_1C_1. Démontrer que A_1, B et C sont colinéaires.

OC99. Soit $\mathbb{Q}^+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ telles que pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$ les égalités

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{x+1}$$

et

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^3}$$

tiennent.

OC100. Soit a_n la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, et

$$a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

pour $n \geq 2$. Démontrer que $a_{2012} - 2010$ est divisible par 2011.

OC96. Let $a, b > 1$ be two relatively prime integers. We define $x_1 = a$, $x_2 = b$ and

$$x_n = \frac{{x_{n-1}}^2 + {x_{n-2}}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}}$$

for all $n \geq 3$. Prove that x_n is not an integer for all $n \geq 3$.

OC97. Let A be a set with 225 elements. Suppose that there are eleven subsets $A_1, \ldots, A_{11}$ of A such that $|A_i| = 45$ for $1 \leq i \leq 11$ and $|A_i \cap A_j| = 9$ for $1 \leq i < j \leq 11$. Prove that $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}| \geq 165$, and give an example for which equality holds.

OC98. Let ABC be a triangle with $\angle BAC = 60^\circ$. Let B_1 and C_1 be the feet of the bisectors from B and C. Let A_1 be the symmetrical of A with respect to the line B_1C_1. Prove that A_1, B and C are collinear.

OC99. Let $\mathbb{Q}^+$ denote the set of positive rational numbers. Determine all functions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ so that, for all $x \in \mathbb{Q}^+$ we have

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{x+1}$$

and

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^3}\,.$$

OC100. Let a_n be the sequence defined by $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, and

$$a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

for all $n \geq 2$. Prove that $a_{2012} - 2010$ is divisible by 2011.

OLYMPIAD SOLUTIONS

OC36. The obtuse-angled triangle ABC has sides of length a, b, and c opposite the angles $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$ respectively. Prove that

$$a^3 \cos A + b^3 \cos B + c^3 \cos C < abc\,.$$

(*Originally question #6 from the 2008/9 British Mathematical Olympiad, Round 1.*)