THE OLYMPIAD CORNER

No. 300

Nicolae Strungaru

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 août 2013**.

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

OC66. Soit $n \geq 2$ un entier positif. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que

$$f(x - f(y)) = f(x + y^n) + f(f(y) + y^n), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

OC67. Un 2011-gone convexe est dessiné au tableau. Pierre est occupé à dessiner ses diagonales de sorte que chaque nouvelle diagonale ne coupe pas plus qu'une seule des diagonales déjà dessinées. Quel est le plus grand nombre de diagonales que Pierre peut dessiner ?

OC68. Trouver tous les entiers x, y de sorte que

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y\,.$$

OC69. Soit n un entier positif et soit $P(x, y) = x^n + xy + y^n$. Montrer qu'on ne peut pas trouver deux polynômes $G(x, y)$ et $H(x, y)$ à coefficients réels tels que

$$P(x, y) = G(x, y) \cdot H(x, y)\,.$$

OC70. $\triangle ABC$ est un triangle tel que $\angle C$ and $\angle B$ sont acutangles. Soit D un point variable sur BC tel que $D \neq B, C$ and AD n'est pas perpendiculaire à BC. Soit d la droite passant par D et perpendiculaire à BC. Supposons que $d \cap AB = E, d \cap AC = F$. Soit M, N, P les centres des cercles inscrits de $\triangle AEF, \triangle BDE, \triangle CDF$. Montrer que A, M, N, P sont cocycliques si et seulement d passe par le centre du cercle inscrit de $\triangle ABC$.

OC66. Let $n \geq 2$ be a positive integer. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so that

$$f(x - f(y)) = f(x + y^n) + f(f(y) + y^n), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

OC67. A convex 2011-gon is drawn on the board. Peter keeps drawing its diagonals in such a way that each newly drawn diagonal intersects no more than one of the already drawn diagonals. What is the greatest number of diagonals that Peter can draw?

OC68. Find all integers x, y so that

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y\,.$$

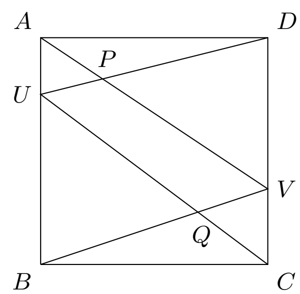
OC69. Let n be a positive integer and let $P(x, y) = x^n + xy + y^n$. Prove that we cannot find two non-constant polynomials $G(x, y)$ and $H(x, y)$ with real coefficients such that

$$P(x, y) = G(x, y) \cdot H(x, y)\,.$$

OC70. $\triangle ABC$ is a triangle such that $\angle C$ and $\angle B$ are acute. Let D be a variable point on BC such that $D \neq B, C$ and AD is not perpendicular to BC. Let d be the line passing through D and perpendicular to BC. Assume $d \cap AB = E$, $d \cap AC = F$. Let M, N, P be the incentres of $\triangle AEF$, $\triangle BDE$, $\triangle CDF$. Prove that A, M, N, P are concyclic if and only if d passes through the incentre of $\triangle ABC$.

OLYMPIAD SOLUTIONS

OC6. In the diagram, $ABCD$ is a square, with U and V interior points of the sides AB and CD respectively. Determine all the possible ways of selecting U and V so as to maximize the area of the quadrilateral $PUQV$. (*Originally question # 3 from the 1992 Canadian Mathematical Olympiad.*)



Solved by Michel Bataille, Rouen, France; Florencio Cano Vargas, Inca, Spain; Chip Curtis, Missouri Southern State University, Joplin, MO, USA; Oliver Geupel, Brühl, NRW, Germany; and Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. We give the solution of Bataille.

We will use $[\cdot]$ to denote the area. Let a be the length of the sides of the square. Since

$$[AVB] + [DUC] = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = [ABCD]\,, \tag{1}$$

we get

$$[PUQV] = [APD] + [QBC]\,.$$

Let $u = AU$ and $v = CV$, and let P', Q' be the orthogonal projections of P onto AD, respectively Q onto BC. Then

$$\frac{AP'}{AD} = \frac{PP'}{DV} \Rightarrow AP' = \frac{AD}{DV}PP' = \frac{a}{a-v}PP'\,.$$

Similarly we get $DP' = \frac{a}{u}PP'$.

Then

$$a = AP' + DP' = \frac{a}{a-v}PP' + \frac{a}{u}PP'\,,$$

which yields

$$PP' = \frac{u(a-v)}{a+u-v}.$$

In a similar way, we obtain

$$QQ' = \frac{v(a-u)}{a+v-u}\,.$$