THE CONTEST CORNER

No. 2

Shawn Godin

The Contest Corner *est une nouvelle rubrique offerte pas* ***Crux Mathematicorum****, comblant ainsi le vide suite à la mutation en 2013 de* Mathematical Mayhem *et* Skoliad *vers une nouvelle revue en ligne. Il s'agira d'un amalgame de* Skoliad*,* The Olympiad Corner *et l'ancien* Academy Corner *d'il y a plusieurs années. Les problèmes en vedette seront tirés de concours destinés aux écoles secondaires et au premier cycle universitaire ; les lecteurs seront invités à soumettre leurs solutions ; ces solutions commenceront à paraître au prochain numéro.*

Les solutions peuvent être envoyées à :

Shawn Godin
Cairine Wilson S.S.
975 Orleans Blvd.
Orleans, ON, CANADA
K1C 2Z5

ou par couriel à

crux-contest@cms.math.ca.

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 août 2013**.

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de Université de Saint-Boniface, Winnipeg, MB, d'avoir traduit les problèmes.

CC6. Déterminer des entiers positifs a et b tels que

$$3^{x+a} + 2^{x+a} + 2^x = 2^{x+b} + 3^x$$

soit satisfaite par un certain entier x.

CC7. Soit $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, le disque unitaire ouvert dans le plan $\mathbb{R}^2$. Une corde dans U est définie tout naturellement comme étant une corde du cercle unitaire, moins ses extrémités. Prouver vrai ou prouver faux : il existe une bijection $f : \mathbb{R}^2 \to U$ telle que toute droite dans $\mathbb{R}^2$ corresponde à une corde dans U.

CC8. Voici un jeu simple qui déterminera si A ou B paiera pour une pizza. On brasse un jeu de cartes, puis A et B y pigent une carte en alternance. Le premier à piger un as va payer pour la pizza. Si A est le premier à piger une carte, quelle est la probabilité qu'il paye ? (Fournir votre réponse sous forme de fraction sans facteur commun.)

CC9. Soit $k \geq 3$, entier. Posons $n = \frac{k(k+1)}{2}$. Soit $S \subset \mathbb{Z}_n$ tel que $\|S\| = k$. Démontrer que $S + S \neq \mathbb{Z}_n$. Noter que $\|S\|$ représente la cardinalité de S et que $S + S = \{x + y \mid x \in S, y \in S\}$.

CC10. Soit m un entier positif et soit $d(m)$ le nombre de diviseurs entiers positifs de m. Déterminer tous les entiers positifs n tels que $d(n) + d(n + 1) = 5$.

. . . .

CC6. Determine all pairs of positive integers a and b for which

$$3^{x+a} + 2^{x+a} + 2^x = 2^{x+b} + 3^x$$

is satisfied for some integer x.

CC7. Let $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ be the open unit disc in the plane $\mathbb{R}^2$. A chord of U is naturally defined to be a chord of the unit circle with its distinct endpoints removed. Prove or disprove: there is a bijection $f : \mathbb{R}^2 \to U$ such that every straight line in $\mathbb{R}^2$ is mapped by f onto a chord of U.

CC8. To see who pays for a pizza, A and B play the following simple game. They shuffle a deck of cards, and then in turns draw cards. The first person to draw an ace pays for the pizza. If A draws first, what is the probability that he buys? (Express your answer as a fraction in lowest terms.)

CC9. Let $k \geq 3$ be an integer. Let $n = \frac{k(k+1)}{2}$. Let $S \subset \mathbb{Z}_n$ with $\|S\| = k$. Show that $S + S \neq \mathbb{Z}_n$. Note that $\|S\|$ denotes the cardinality of S and $S + S = \{x + y \mid x \in S, y \in S\}$.

CC10. Given a positive integer m, let $d(m)$ be the number of positive divisors of m. Determine all positive integers n such that $d(n) + d(n + 1) = 5$.

If you know of a mathematics contest at the high school or undergraduate level whose problems you would like to see in *Contest Corner*, please send information about the contest to `crux-contest@cms.math.ca`.