PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1 octobre 2012**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3651. *Correction. Proposé par Pham Kim Hung, étudiant, Université de Stanford, Palo Alto, CA, É-U.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + 4abc(3 - ab - bc - ca) \leq 5 .$$

3664. *Proposé par Pham Kim Hung, étudiant, Université de Stanford, Palo Alto, CA, É-U.*

Soit a, b et c trois nombres non négatifs tels que $a + b + c = 3$ Montrer que

$$|(1 - a^2b)(1 - b^2c)(1 - c^2a)| \leq 3|1 - abc| .$$

3665. *Proposé par Nguyen Thanh Binh, Hanoi, Vietnam.*

Dans une quadrilatère cyclique $ABCD$, soit M le point d'intersection des diagonales AC et BD, et soit Q le point d'intersection de la droite passant par M et le point milieu de BC. Montrer que MQ est perpendiculaire à AD si et seulement si les côtés AD et BC sont parallèles (en quel cas $ABCD$ est un trapèzoïde isocèle) ou les diagonales sont perpendiculaires (et alors on a la configuration de Brahmagupta).

3666. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des paires d'entiers relativement premiers et

$$\mathcal{S} = \{(a, b) \in \mathcal{R} : 5a + 42b \equiv 0 \pmod{1789}\} .$$

Trouver une bijection explicit entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R} - S$.

3667. *Proposé par Joe Howard, Portales, NM, É-U.*

On suppose que $b_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geq 3$; et $\prod_{i=1}^{n} b_i = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{n-2} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{n-1}{2}}.$$

3668. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

On suppose que p, q et r sont trois nombres premiers distincts. Combien de solutions en entiers positifs l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ (où $y = pqr$) possède-t-elle ?

3669. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ et soit r un nombre réel ($r \neq 0, 1$). On définit les points D, E, F par $\overrightarrow{BD} = r\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = r\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AF} = r\overrightarrow{AB}$. Le cercle Γ coupe encore DA en D_1 et la parallèle à BC par D_1 en B'. On construit les points C' et A' de manière analogue. Pour quels r les droites AA', BB', CC' sont-elles concourantes ? Quel est alors leur point d'intersection ?

3670. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdydz}{x + y + z}.$$

3671★. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit M un point à l'intérieur d'un tétrahèdre $ABCD$. Est-il vrai, oui ou non, que

$$\frac{[BCD]}{AM^2} = \frac{[ACD]}{BM^2} = \frac{[ABD]}{CM^2} = \frac{[ABC]}{DM^2} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

si et seulement si le tétrahèdre est régulier et que M est son centre de gravité. On note ici l'aire de T par $[T]$.

3672. *Proposé par Pham Van Thuan, Université de Science des Hanoï, Hanoï, Vietnam.*

Soit x et y deux nombres réels tels que $x^2 + y^2 = 1$ Montrer que

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + xy} \geq \frac{3}{1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$

Trouver quand cette inégalité est valable.

3673. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Calculer le produit

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^{n-1}} .$$

3674★. *Proposé par Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, Chine.*

Soit I le centre de la sphère inscrite dans un tétrahèdre $ABCD$ et soit A_1, B_1, C_1, D_1 les points respectivement symétriques de I par rapport aux plans BCD, ACD, ABD, ABC. Les quatre droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont-elles forcément concourantes ?

3675. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit a, b et c les côtés d'un triangle et s son demi-périmètre. Soit respectivement r et R les rayons de ses cercles inscrit et circonscrit. Montrer que

$$6 \;\le\; \sum_{\text{cyclique}} \frac{b(s-b)+c(s-c)}{a(s-a)} \;\le\; \frac{3R}{r} .$$

. . . .

3651. *Correction. Proposed by Hung Pham Kim, student, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.*

Let a, b, and c be nonnegative real numbers such that $a+b+c = 3$. Prove that

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc+4abc(3-ab-bc-ca) \;\le\; 5 .$$

3664. *Proposed by Hung Pham Kim, student, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.*

Let a, b, and c be nonnegative real numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$|(1-a^2b)(1-b^2c)(1-c^2a)| \;\le\; 3|1-abc| .$$

3665. *Proposed by Nguyen Thanh Binh, Hanoi, Vietnam.*

Let the diagonals AC and BD of the cyclic quadrilateral $ABCD$ intersect at M, and let the line joining M to the midpoint of BC meet AD at Q. Prove that MQ is perpendicular to AD if and only if the sides AD and BC are parallel (in which case $ABCD$ is an isosceles trapezoid), or the diagonals are perpendicular (and we have Brahmagupta's configuration).

3666. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\mathcal{R}$ denote the set of all pairs of relatively prime integers and

$$\mathcal{S} = \{(a,b) \in \mathcal{R} : 5a + 42b \equiv 0 \pmod{1789}\}.$$

Find an explicit bijection between $\mathcal{S}$ and $\mathcal{R} - \mathcal{S}$.

3667. *Proposed by Joe Howard, Portales, NM, USA.*

Suppose $b_i > 0$ for $i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geq 3$; and $\prod_{i=1}^{n} b_i = 1$. Prove

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{n-2} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{n-1}{2}}.$$

3668. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Suppose p, q and r are distinct prime numbers. How many positive integer solutions has the equation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ where $y = pqr$?

3669. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ABC be a triangle inscribed in a circle Γ and let r be a real number ($r \neq 0, 1$). Points D, E, F are defined by $\overrightarrow{BD} = r\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = r\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AF} = r\overrightarrow{AB}$. The circle Γ meets again DA at D_1 and the parallel to BC through D_1 at B'. Points C' and A' are constructed in a similar way. For which r are AA', BB', CC' concurrent lines? What is then their point of concurrency?

3670. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $n \geq 2$ be an integer. Calculate

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x+y+z}.$$

3671★. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $ABCD$ be a tetrahedron and let M be a point in its interior. Prove or disprove that

$$\frac{[BCD]}{AM^2} = \frac{[ACD]}{BM^2} = \frac{[ABD]}{CM^2} = \frac{[ABC]}{DM^2} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

if and only if the tetrahedron is regular and M is its centroid. Here $[T]$ denotes the area of T.

3672. *Proposed by Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Let x and y be real numbers such that $x^2 + y^2 = 1$. Prove that

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+xy} \;\geq\; \frac{3}{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$

When does this inequality occur?

3673. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Calculate the product

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{(-1)^{n-1}} .$$

3674★. *Proposed by Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, China.*

Let I denote the centre of the inscribed sphere of a tetrahedron $ABCD$ and let A_1, B_1, C_1, D_1 denote their symmetric points of point I about planes BCD, ACD, ABD, ABC respectively. Must the four lines AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 be concurrent?

3675. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let a, b, and c be the sides of a triangle and let s be its semiperimeter. Let r and R denote its inradius and circumradius respectively. Prove that

$$6 \;\leq\; \sum_{\text{cyclic}} \frac{b(s-b)+c(s-c)}{a(s-a)} \;\leq\; \frac{3R}{r}\,.$$