MATHEMATICAL MAYHEM

Mathematical Mayhem began in 1988 as **a Mathematical Journal for and by High School and University Students**. It continues, with the same emphasis, as an integral part of ***Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem***.

Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **15 février 2012**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, Université de Saint-Boniface, Winnipeg, MB, d'avoir traduit les problèmes.

M488. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Un triangle a les sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

(a) Si $x_1 < x_2 < x_3$ et $y_3 < y_1 < y_2$, déterminer la surface du triangle.

(b) Démontrer que si on laisse tomber les conditions sur x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 et y_3, alors l'expression que vous avez fournie en (a) donne soit la surface, soit -1 fois la surface.

M489. *Proposé par Neculai Stanciu, École secondaire George Emil Palade, Buzău, Roumanie.*

Démontrer que si m et n sont des entiers positifs relativement premiers tels que

$$m\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2010}\right) = n,$$

alors 2011 divise n.

M490. *Proposé par Johan Gunardi, étudiant, SMPK 4 BPK PENABUR, Jakarta, Indonésie.*

Pour n entier positif, soit $S(n)$ la somme des chiffres dans l'expression décimale (base 10) de n. Soit m un entier positif donné ; démontrer qu'il existe n entier positif tel que $m = \frac{S(n^2)}{S(n)}$.

M491. *Proposé par Edward T.H. Wang, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soient a, b et c des constantes, pas nécessairement distinctes. Résoudre l'équation ci-bas :

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2-(b-c)^2} + \frac{(x-b)^2}{(x-b)^2-(c-a)^2} + \frac{(x-c)^2}{(x-c)^2-(a-b)^2} = 1\,.$$

M492. *Proposé par Pedro Henrique O. Pantoja, étudiant, UFRN, Brésil.*

Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2009} (k+1)![6^k(6k+11)-k-1] = 2011!\left(6^{2010}-1\right)\,.$$

M493. *Proposé par Neculai Stanciu, École secondaire George Emil Palade, Buzău, Roumanie.*

Déterminer tous les entiers positifs x qui satisfont à l'équation

$$\frac{x+\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right]}{\left[\sqrt{4x+1}+4022\right]} + \frac{x}{\left[\sqrt{4x+2}\right]+4022} = 1\,,$$

où $[x]$ est la partie entière de x.

M494. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 2$. Déterminer la valeur minimum de $\left|z - \frac{1}{z}\right|$.

. . . .

M488. *Proposed by the Mayhem Staff.*

A triangle has vertices (x_1, y_1), (x_2, y_2), and (x_3, y_3).

(a) If $x_1 < x_2 < x_3$ and $y_3 < y_1 < y_2$, determine the area of the triangle.

(b) Show that, if the conditions on x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, and y_3 are dropped, the expression from (a) gives either the area or -1 times the area.

M489. *Proposed by Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.*

Prove that if m and n are relatively prime positive integers such that

$$m\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2010}\right)=n,$$

then 2011 divides n.

M490. *Proposed by Johan Gunardi, student, SMPK 4 BPK PENABUR, Jakarta, Indonesia.*

For any positive integer n, let $S(n)$ denote the sum of the digits of n (in base 10). Given a positive integer m, prove that there exists a positive integer n such that $m=\dfrac{S(n^2)}{S(n)}$.

M491. *Proposed by Edward T.H. Wang, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Let a, b, and c be given constants, not necessarily distinct. Solve the equation below:

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2-(b-c)^2}+\frac{(x-b)^2}{(x-b)^2-(c-a)^2}+\frac{(x-c)^2}{(x-c)^2-(a-b)^2}=1\,.$$

M492. *Proposed by Pedro Henrique O. Pantoja, student, UFRN, Brazil.*

Prove that

$$\sum_{k=0}^{2009}(k+1)![6^k(6k+11)-k-1]=2011!\left(6^{2010}-1\right)\,.$$

M493. *Proposed by Neculai Stanciu, George Emil Palade Secondary School, Buzău, Romania.*

Find all positive integers x that satisfy the equation

$$\frac{x+\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right]}{\left[\sqrt{4x+1}+4022\right]}+\frac{x}{\left[\sqrt{4x+2}\right]+4022}=1\,,$$

where $[x]$ is the integer part of x.

M494. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Let z be a complex number such that $|z|=2$. Find the minimum value of $\left|z-\dfrac{1}{z}\right|$.