PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **15 mars 2012**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3638. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Etant donné un triangle ABC, on arrange respectivement les points D, E, F sur les droites BC,CA,AB, de sorte que

$$BD : DC = \lambda : 1 - \lambda, \quad CE : EA = \mu : 1 - \mu, \quad AF : FB = \nu : 1 - \nu.$$

Montrer que DEF est le triangle pédal du triangle ABC si et seulement si

$$(2\lambda - 1)BC^2 + (2\mu - 1)CA^2 + (2\nu - 1)AB^2 = 0.$$

3639. *Proposé par Pham Kim Hung, étudiant, Université de Stanford, Palo Alto, CA, É-U.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$\frac{a^2b}{a+b+1} + \frac{b^2c}{b+c+1} + \frac{c^2a}{c+a+1} \leq 1\,.$$

3640. *Proposé par Roy Barbara, Université Libanaise, Fanar, Liban.*

On considère la fonction $f(x) = -\sqrt[3]{4x^6 + 6x^3 + 3}$.

(a) Trouver les points fixes de $f(x)$, s'il y en a.

(b) Trouver les points périodiques de période 2 de $f(x)$, s'il y en a.

(c) Montrer que $x = -1$ est l'unique nombre réel tel que x et $f(x)$ sont tous deux des entiers.

3641. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n < \pi/2$ n nombres réels. Montrer que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sec(x_k)\right)\left(1 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(x_k)\right)^2\right)^{1/2} \geq 1\,.$$

3642. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Evaluer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 (2x^2-5x-1)^n dx}{\int_0^1 (x^2-4x-1)^n dx}\,.$$

3643. *Proposé par Pham Van Thuan, Université de Science des Hanoï, Hanoï, Vietnam.*

Soit u et v deux nombres réels positifs. Montrer que

$$\frac{1}{8}\left(17-\frac{2uv}{u^2+v^2}\right) \;\le\; \sqrt[3]{\frac{u}{v}}+\sqrt[3]{\frac{v}{u}} \;\le\; \sqrt{(u+v)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}\,.$$

Pour chaque inégalité, déterminer quand il y a égalité.

3644. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

On opère une trisection des côtés AB et AC du triangle ABC avec les points D, E et F, G respectivement, de telle sorte que $AE = ED = DB$ et $AF = FG = GC$. La droite BF coupe respectivement CD, CE aux points K, L, tandis que BG coupe CD, CE en N, M respectivement.

Montrer que :

(a) KM est parallèle à BC ;

(b) Aire$(KLM) = \frac{5}{7}$Aire$(KLMN)$.

3645. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero et Juan José Egozcue, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit a, b et c trois nombres positifs tels que $a^2+b^2+c^2+2abc = 1$. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \sqrt{a\left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{c}-c\right)} \;>\; 2\,.$$

3646. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $\alpha \ge 0$ et soit β un nombre positif. Trouver la limite

$$L(\alpha,\beta) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)^k - n\right)\,.$$

3647. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Montrer que dans un triangle ABC dont les rayons des cercles exinscrits sont r_a, r_b et r_c, on a

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)}{ac} \geq 9,$$

où $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.

3648. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver tous les nombres réels x, y, z tels que $xyz = 1$ et $x^3 + y^3 + z^3 = \frac{S(S-4)}{4}$ où $S = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$.

3649. *Proposé par Pham Van Thuan, Université de Science des Hanoï, Hanoï, Vietnam.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs et soit

$$k = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Montrer que

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{k^3 - 15k^2 + 63k - 45}{4},$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si $(a, b, c) = \left(\frac{k - 5 \pm \sqrt{k^2 - 10k + 9}}{4}, 1, 1\right)$ ou une quelconque de ses permutations.

3650. *Proposé par Mehmet Sahin, Ankara, Turquie.*

Soit ABC un triangle acutangle avec $A' \in BC$, $B' \in CA$ et $C' \in AB$ arrangés de telle sorte que

$$\angle ACC' = \angle CBB' = \angle BAA' = 90^\circ.$$

Montrer que

(a)
$$|BC'||CA'||AB'| = abc;$$

(b)
$$\frac{AA'}{BC'}\frac{BB'}{CA'}\frac{CC'}{AB'} = \tan(A)\tan(B)\tan(C);$$

(c)
$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = 1 + \frac{4R^2}{(2R + r)^2 - s^2}.$$

3638. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ABC be a triangle and let points D, E, F lie on lines BC, CA, AB, respectively, such that

$$BD : DC = \lambda : 1-\lambda, \quad CE : EA = \mu : 1-\mu, \quad AF : FB = \nu : 1-\nu.$$

Show that DEF is a pedal triangle with regard to ΔABC if and only if

$$(2\lambda - 1)BC^2 + (2\mu - 1)CA^2 + (2\nu - 1)AB^2 = 0.$$

3639. *Proposed by Hung Pham Kim, student, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.*

Let a, b, and c be nonnegative real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{a^2b}{a+b+1} + \frac{b^2c}{b+c+1} + \frac{c^2a}{c+a+1} \le 1\,.$$

3640. *Proposed by Roy Barbara, Lebanese University, Fanar, Lebanon.*

Consider the function $f(x) = -\sqrt[3]{4x^6 + 6x^3 + 3}$.

(a) Find the fixed points of $f(x)$, if any.

(b) Find the periodic points with period 2 of $f(x)$, if any.

(c) Prove that $x = -1$ is the unique real number such that x and $f(x)$ are both integers.

3641. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_n < \pi/2$ be real numbers. Prove that

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sec(x_k)\right)\left(1 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(x_k)\right)^2\right)^{1/2} \ge 1\,.$$

3642. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 (2x^2 - 5x - 1)^n dx}{\int_0^1 (x^2 - 4x - 1)^n dx}\,.$$

3643. *Proposed by Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Let u and v be positive real numbers. Prove that

$$\frac{1}{8}\left(17-\frac{2uv}{u^2+v^2}\right) \;\leq\; \sqrt[3]{\frac{u}{v}}+\sqrt[3]{\frac{v}{u}} \;\leq\; \sqrt{(u+v)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}$$

For each inequality, determine when equality holds.

3644. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

We trisect the sides AB and AC of triangle ABC with the points D, E and F, G respectively such that $AE = ED = DB$ and $AF = FG = GC$. The line BF intersects CD, CE in the points K, L respectively, while BG intersects CD, CE in N, M respectively.

Prove that:

(a) KM is parallel to BC;

(b) $\text{Area}(KLM) = \frac{5}{7}\text{Area}(KLMN)$.

3645. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero and Juan José Egozcue, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let a, b, and c be positive numbers such that $a^2+b^2+c^2+2abc = 1$. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{a\left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{c}-c\right)} \;>\; 2\,.$$

3646. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $\alpha \geq 0$ and let β be a positive number. Find the limit

$$L(\alpha,\beta) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)^k - n\right)\,.$$

3647. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Show that in triangle ABC with exradii r_a, r_b and r_c,

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{(r_a+r_b)(r_b+r_c)}{ac} \;\geq\; 9\,,$$

where $AB = c$, $BC = a$, and $CA = b$.

3648. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find all real numbers x, y, z such that $xyz = 1$ and $x^3+y^3+z^3 = \frac{S(S-4)}{4}$ where $S = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$.

3649. *Proposed by Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Let a, b, and c be three positive real numbers and let

$$k = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Prove that

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{k^3-15k^2+63k-45}{4},$$

and equality holds if and only if $(a,b,c) = \left(\frac{k-5\pm\sqrt{k^2-10k+9}}{4}, 1, 1\right)$ or any of its permutations.

3650. *Proposed by Mehmet Sahin, Ankara, Turkey.*

Let ABC be an acute-angled triangle with $A' \in BC$, $B' \in CA$, and $C' \in AB$ arranged so that

$$\angle ACC' = \angle CBB' = \angle BAA' = 90^\circ.$$

Prove that

(a)
$$|BC'||CA'||AB'| = abc;$$

(b)
$$\frac{AA'}{BC'}\frac{BB'}{CA'}\frac{CC'}{AB'} = \tan(A)\tan(B)\tan(C);$$

(c)
$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = 1 + \frac{4R^2}{(2R+r)^2-s^2}.$$