PROBLEMS

*Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 August 2010**. An asterisk (⋆) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3501. *Proposed by Hassan A. ShahAli, Tehran, Iran.*

Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers, E the set of all even positive integers, and O the set of all odd positive integers. A set $S \subseteq \mathbb{N}$ is *closed* if $x + y \in S$ for all distinct x, $y \in S$, and *unclosed* if $x + y \notin S$ for all distinct x, $y \in S$. Prove that if $\mathbb{N}$ is partitioned into A and B, where A is closed and nonempty, and B is unclosed and infinite, then $A = E$ and $B = O$.

3502. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Find all real solutions of the following system of equations

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + 21} & = & \sqrt{x_2^2 + 77}\,, \\ x_2^2 + \sqrt{x_3^2 + 21} & = & \sqrt{x_3^2 + 77}\,, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^2 + \sqrt{x_1^2 + 21} & = & \sqrt{x_1^2 + 77}\,. \end{array}$$

3503. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Given a triangle and the midpoints of its sides, with the use of a straight edge and only three uses of a pair of compasses, bisect all three angles of the triangle.

3504. *Proposed by Mariia Rozhkova, Kiev, Ukraine.*

Given triangle ABC, set $Q = a\cos^2 A + b\cos^2 B + c\cos^2 C$, and let ABC have area S and circumradius R. Prove that

(a) $Q \geq \dfrac{S}{R}$, with equality if and only if ABC is equilateral.

(b) $Q \leq \dfrac{S\sqrt{2}}{R}$ if ABC is not obtuse, with equality if and only if ABC is an isosceles right triangle.

3505. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaijan.*

The circles Γ_1 and Γ_2 have a common centre O, and Γ_1 lies inside Γ_2. The point $A \neq O$ lies inside Γ_1 and a ray through A intersects Γ_1 and Γ_2 at the points B and C, respectively. Let E be a point on the line BC such that DE is perpendicular to BC. Prove that $AB = EC$ if and only if OA is perpendicular to BC.

3506. *Proposed by Pedro Henrique O. Pantoja, UFRN, Brazil.*

Prove that $Q(n) + Q\big(n^2\big) + Q\big(n^3\big)$ is a perfect square for infinitely many positive integers n that are not divisible by 10, where $Q(n)$ is the sum of the digits of n.

3507. *Proposed by Pham Huu Duc, Ballajura, Australia.*

Let a, b, and c be positive real numbers. Prove that

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq \sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)}\,.$$

3508. *Proposed by Hung Pham Kim, student, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.*

Let a, b, c, d be nonnegative real numbers such that $a+b+c+d=4$. Prove that

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{cd} + c\sqrt{da} + d\sqrt{ab} \ \leq\ 2\big(1+\sqrt{abcd}\big)\,.$$

3509. *Proposed by Hung Pham Kim, student, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.*

Let a, b, and c be nonnegative real numbers such that $a+b+c=3$. For each positive real number k, find the maximum value of

$$\left(a^2b+k\right)\left(b^2c+k\right)\left(c^2a+k\right)\,.$$

3510. *Proposed by Cosmin Pohoaţă, Tudor Vianu National College, Bucharest, Romania.*

Let d be a line exterior to a given circle Γ with centre O. Let A be the orthogonal projection of O on the line d, M be a point on Γ, and X, Y be the intersections of Γ, d with the circle Γ' of diameter AM. Prove that the line XY passes through a fixed point as M moves about Γ.

3511. *Proposed by Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Let a, b, c, and d be nonnegative real numbers. Prove that

$$\prod_{\text{cyclic}} \left(a^2+b^2+c^2\right) \;\le\; \frac{1}{64}(a+b+c+d)^8 \,.$$

3512. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let α be a real number and let $p \;\ge\; 1$. Find

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{n^p+(\alpha-1)k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}} \,.$$

3513. *Proposed by Hassan A. ShahAli, Tehran, Iran.*

Let α and β be positive real numbers, and r be a positive rational number. Prove that there exist infinitely many integers m and n such that

$$\frac{\lfloor m\alpha\rfloor}{\lfloor n\beta\rfloor} \;=\; r\,,$$

where $\lfloor x\rfloor$ is the greatest integer not exceeding x.

. . . .

3501. *Proposé par Hassan A. ShahAli, Téhéran, Iran.*

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers positifs, $E \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble de ceux qui sont pairs, et $O \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble de ceux qui sont impairs. On dit qu'un ensemble $S \subseteq \mathbb{N}$ est *fermé* si $x+y \in S$ pour tous les x, $y \in S$ distincts, et *non-fermé* si $x+y \notin S$ pour tous les x, $y \in S$ distincts. Montrer que si $\mathbb{N}$ est partagé en A et B, où A est fermé et non vide, et B est non-fermé et infini, alors $A = E$ et $B = O$.

3502. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Trouver toutes les solutions réelles du système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
x_1^2+\sqrt{x_2^2+21} &= \sqrt{x_2^2+77}\,,\\
x_2^2+\sqrt{x_3^2+21} &= \sqrt{x_3^2+77}\,,\\
\cdots \qquad &\cdots \qquad \cdots\\
x_n^2+\sqrt{x_1^2+21} &= \sqrt{x_1^2+77}\,.
\end{aligned}$$

3503. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Etant donné un triangle et les points milieux de ses côtés, construire les bissectrices de ses trois angles avec la règle et trois utilisations du compas.

3504. *Proposé par Mariia Rozhkova, Kiev, l'Ukraine.*

Dans un triangle donné ABC, d'aire S et dont le rayon du cercle circonscrit est R, on pose $Q = a\cos^2 A + b\cos^2 B + c\cos^2 C$. Montrer que

(a) $Q \geq \frac{S}{R}$, l'égalité ayant lieu si et seulement si ABC est équilatéral.

(b) $Q \leq \frac{S\sqrt{2}}{R}$ si ABC est non obtus, l'égalité ayant lieu si et seulement si ABC est un triangle rectangle isocèle.

3505. *Proposé par Yakub N. Aliyev, Université de Qafqaz, Khyrdalan, Azerbaïdjan.*

Les cercles Γ_1 et Γ_2 ont un centre commun O, et Γ_1 est à l'intérieur de Γ_2. Par le point $A \neq O$, situé à l'intérieur de Γ_1, on trace un rayon coupant respectivement Γ_1 et Γ_2 aux points B et C. Soit E un point de la droite BC tel que DE soit perpendiculaire à BC. Montrer que $AB = EC$ si et seulement si OA est perpendiculaire à BC.

3506. *Proposé par Pedro Henrique O. Pantoja, UFRN, Brésil.*

Montrer que $Q(n) + Q\left(n^2\right) + Q\left(n^3\right)$ est un carré parfait pour une infinité d'entiers positifs n qui ne sont pas divisibles par 10, où $Q(n)$ dénote la somme des chiffres de n.

3507. *Proposé par Pham Huu Duc, Ballajura, Australie.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq \sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)}\,.$$

3508. *Proposé par Pham Kim Hung, étudiant, Université de Stanford, Palo Alto, CA, É-U.*

Soit a, b, c et d des nombres réels non négatifs tels que $a+b+c+d = 4$. Montrer que

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{cd} + c\sqrt{da} + d\sqrt{ab} \;\leq\; 2\left(1 + \sqrt{abcd}\right)\,.$$

3509. *Proposé par Pham Kim Hung, étudiant, Université de Stanford, Palo Alto, CA, É-U.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a+b+c=3$. Pour tout nombre réel positif k, trouver la valeur maximale de

$$\left(a^2b+k\right)\left(b^2c+k\right)\left(c^2a+k\right)\,.$$

3510. *Proposé par Cosmin Pohoaţă, Collège National Tudor Vianu, Bucarest, Roumanie.*

Soit d une droite extérieure à un cercle donné Γ de centre O. Soit A la projection orthogonale de O sur la droite d, M un point sur Γ, et X, Y les intersections de Γ et d avec le cercle Γ' de diamètre AM. Montrer que la droite XY passe par un point fixe lorsque M parcourt Γ.

3511. *Proposé par Pham Van Thuan, Université de Science de Hanoï, Hanoï, Vietnam.*

Soit a, b, c et d quatre nombres réels non négatifs. Montrer que

$$\prod_{\text{cyclique}}\left(a^2+b^2+c^2\right)\;\le\;\frac{1}{64}(a+b+c+d)^8\,.$$

3512. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit α un nombre réel et soit $p\ \ge\ 1$. Trouver

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{n^p+(\alpha-1)k^{p-1}}{n^p-k^{p-1}}\,.$$

3513. *Proposé par Hassan A. ShahAli, Tehran, Iran.*

Soit α et β deux nombres réel positifs, et soit r un nombre rationnel positif. Montre qu'il existe une infinité d'entiers positifs m et n tels que

$$\frac{\lfloor m\alpha\rfloor}{\lfloor n\beta\rfloor}\;=\;r\,,$$

où $\lfloor x\rfloor$ dénote le plus grand entier ne dépassant pas x.