PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 August 2009**. *An asterisk (⋆) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Rolland Gaudet of the University College of Saint Boniface and Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3401. *Proposed by Tigran Sloyan, Basic Gymnasium of SEUA, Yerevan, Armenia.*

Let $ABCDE$ be a convex pentagon such that $\angle BAC = \angle EAD$ and $\angle BCA = \angle EDA$, and let the lines CB and DE intersect in the point F. Prove that the midpoints of CD, BE, and AF are collinear.

3402. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let D and E be the midpoints of the sides AB and AC in triangle ABC, respectively. Prove that CD is perpendicular to BE if and only if

$$5BC^2 \;=\; AC^2 + AB^2 \,.$$

3403. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

The circles Γ_1 and Γ_2 intersect at P and Q. A line ℓ through P intersects Γ_1 and Γ_2 for the second time at A and B, respectively. The tangents to Γ_1 and Γ_2 at A and B intersect at C. If O is the circumcentre of $\triangle ABC$ determine the locus of O when ℓ rotates about P.

3404. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let Q be a cyclic quadrilateral. The perpendiculars to each diagonal through its endpoints form a parallelogram, P. Characterize the centre of P and show that opposite sides of Q intersect on a diagonal of P.

3405. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find the minimum value of

$$|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos\gamma| + |\cos(\alpha-\beta)| + |\cos(\beta-\gamma)| + |\cos(\gamma-\alpha)|\,,$$

where α, β, and γ are real numbers.

3406. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero and Miquel Grau-Sánchez, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Find
$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n^2}\right)\right].$$

3407. *Proposed by Roy Barbara, Lebanese University, Fanar, Lebanon.*

Let S be a set of positive integers containing the integer 2007 and such that

(a) If x, $y \in S$ and $x \neq y$, then $|x-y| \in S$, and

(b) If $x \in S$, then $\left(x^3 - 1007x + 3007\right) \in S$.

Prove that S is the set of all positive integers.

3408. *Proposed by Slavko Simic, Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia.*

Let $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a sequence of distinct positive integers, and let $|q| < 1$. Prove that the inequality
$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i q^{c_i}}{1+\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} q^{c_i}} \leq \frac{q}{1-q}$$
holds for all such sequences $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ if and only if $q \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3409. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let a, b, c, and d be positive real numbers. Prove that
$$\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3} + \frac{ab+bd+da}{a^3+b^3+d^3} + \frac{ac+cd+da}{a^3+c^3+d^3} + \frac{bc+cd+db}{b^3+c^3+d^3}$$
$$\leq \min\left\{ \frac{a^2+b^2}{(ab)^{3/2}} + \frac{c^2+d^2}{(cd)^{3/2}}, \frac{a^2+c^2}{(ac)^{3/2}} + \frac{b^2+d^2}{(bd)^{3/2}}, \frac{a^2+d^2}{(ad)^{3/2}} + \frac{b^2+c^2}{(bc)^{3/2}} \right\}.$$

3410. *Proposed by Joe Howard, Portales, NM, USA.*

Let a, b, and c be the sides of triangle ABC, let R be its circumradius, and let F be its area. Prove that
$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{bc\sin^2 A/2}{b+c} \geq \frac{F}{2R}.$$

3411. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that

$$a^6 + b^6 + c^6 \ < \ \frac{32}{33}\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2 \ .$$

Prove that at least one of the quadratics $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$, or $cx^2 + ax + b$ has no real roots.

3412. *Proposed by Cao Minh Quang, Nguyen Binh Khiem High School, Vinh Long, Vietnam.*

Let a, b, and c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{\sqrt{a^3 + 2b^3 + 6}} \ \leq \ 1 \, .$$

3413. *Proposed by Vo Quoc Ba Can, Can Tho University of Medicine and Pharmacy, Can Tho, Vietnam.*

Let a, b, c, and d be real numbers in the interval $[1, 2]$. Prove that

$$\frac{a+b}{c+d} + \frac{c+d}{a+b} - \frac{a+c}{b+d} \ \leq \ \frac{3}{2} \, .$$

. . . .

3401. *Proposé par Tigran Sloyan, Lycée de la SEUA, Erevan, Arménie.*

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\angle BAC = \angle EAD$ et $\angle BCA = \angle EDA$. Soit F le point d'intersection des droites CB et DE. Montrer que les milieux des CD, BE et AF sont colinéaires.

3402. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit le triangle ABC, où D et E sont les milieux des côtés AB et AC, respectivement. Montrer que CD est perpendiculaire à BE si et seulement si

$$5BC^2 \ = \ AC^2 + AB^2 \, .$$

3403. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Les cercles Γ_1 et Γ_2 intersectent à P et Q. Une ligne ℓ passant par P intersecte une seconde fois Γ_1 et Γ_2 à A et B, respectivement. Les tangentes de Γ_1 et Γ_2 à A et B intersectent à C. Si O est le centre du cercle circonscrit du $\triangle ABC$ dèterminer le lieu de O lorsque ℓ tourne autour de P.

3404. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit Q un quadrilatère cyclique. Les perpendiculaires à chaque diagonale issues de ses sommets forment un parallèlogramme P. Caractériser le centre de P et montrer que les côtés opposés de Q se coupent sur une diagonale de P.

3405. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Déterminer la valeur minimum de

$$|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos\gamma| + |\cos(\alpha-\beta)| + |\cos(\beta-\gamma)| + |\cos(\gamma-\alpha)|\,,$$

où α, β et γ sont des nombres réels.

3406. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero et Miquel Grau-Sánchez, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n^2}\right)\right]\,.$$

3407. *Proposé par Roy Barbara, Université Libanaise, Fanar, Liban.*

Soit S un ensemble d'entiers contenant l'entier 2007 et tel que

(a) Si x, $y \in S$ et $x \neq y$, alors $|x-y| \in S$, et

(b) Si $x \in S$, alors $\left(x^3 - 1007x + 3007\right) \in S$.

Montrer que S est l'ensemble de tous les entiers positifs.

3408. *Proposé par Slavko Simic, Institut de Mathématiques SANU, Belgrade, Serbie.*

Soit $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite d'entiers positifs distincts, et soit $|q| < 1$. Montrer que l'inégalité

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i q^{c_i}}{1+\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} q^{c_i}} \leq \frac{q}{1-q}$$

vaut pour toutes les suites de ce type si et seulement si $q \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3409. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit a, b, c et d des nombres réels positifs. Montrer que

$$\begin{aligned}&\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3} + \frac{ab+bd+da}{a^3+b^3+d^3} + \frac{ac+cd+da}{a^3+c^3+d^3} + \frac{bc+cd+db}{b^3+c^3+d^3}\\ &\quad\leq \min\left\{\frac{a^2+b^2}{(ab)^{3/2}} + \frac{c^2+d^2}{(cd)^{3/2}},\ \frac{a^2+c^2}{(ac)^{3/2}} + \frac{b^2+d^2}{(bd)^{3/2}},\ \frac{a^2+d^2}{(ad)^{3/2}} + \frac{b^2+c^2}{(bc)^{3/2}}\right\}.\end{aligned}$$

3410. *Proposé par Joe Howard, Portales, NM, É-U.*

Soit a, b et c les côtés du triangle ABC, soit R le rayon de son cercle circonscrit et F son aire. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{bc\sin^2 A/2}{b+c} \geq \frac{F}{2R}.$$

3411. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b et c des nombres réels positifs tels que

$$a^6+b^6+c^6 < \frac{32}{33}\left(a^3+b^3+c^3\right)^2.$$

Montrer que au moins une des quadratiques ax^2+bx+c, bx^2+cx+a et cx^2+ax+b n'a aucune racine réelle.

3412. *Proposé par Cao Minh Quang, Collège Nguyen Binh Khiem, Vinh Long, Vietnam.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $abc=1$. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{1}{a^3+2b^3+6} \leq 1.$$

3413. *Proposé par Vo Quoc Ba Can, Université de Médecine et Pharmacie de Can Tho, Can Tho, Vietnam.*

Soit a, b, c et d quatre nombres réels dans l'intervalle $[1,2]$. Montrer que

$$\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{a+c}{b+d} \leq \frac{3}{2}.$$