MATHEMATICAL MAYHEM

Mathematical Mayhem began in 1988 as **a Mathematical Journal for and by High School and University Students**. It continues, with the same emphasis, as an integral part of ***Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem***.

The Mayhem Editor is Ian VanderBurgh (University of Waterloo). The other staff members are Monika Khbeis (Ascension of Our Lord Secondary School, Mississauga), Eric Robert (Leo Hayes High School, Fredericton), Larry Rice (University of Waterloo), and Ron Lancaster (University of Toronto).

Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **15 Mars 2009**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M369. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Soit $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ et $D(0,4)$ les sommets d'un rectangle. Par le point $P(4,3)$, on trace d'une part une droite horizontale coupant BC en M et AD en N et d'autre part une droite verticale coupant AB en Q et CD en R. Montrer que AP, DM et BR passent toutes par le même point.

M370. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

(a) Montrer que $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$ pour tous les angles A et B.

(b) Montrer que $\cos C+\cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ pour tous les angles C et D.

(c) Trouver la valeur exacte de $\cos 20^\circ+\cos 60^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$, sans l'aide d'une calculatrice.

M371. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Un segment AB de longueur 3 contient un point C tel que $AC=2$. On construit d'un même côté de AB deux triangles équilatéraux ACF et CBE. Déterminer l'aire du triangle AKE si K est le point milieu de FC.

M372. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Soit x un nombre réel satisfaisant $x^3 = x + 1$. Trouver des entiers a, b et c de sorte que $x^7 = ax^2 + bx + c$.

M373. *Proposé par Kunal Singh, étudiant, Kendriya Vidyalaya School, Shillong, Inde.*

Les côtés d'un triangle sont mesurés par trois nombres entiers consécutifs et le plus grand angle est le double du plus petit. Déterminer la longueur des côtés du triangle.

M374. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit p un nombre premier fixé, avec $p \geq 3$. Trouver le nombre de solutions de $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{2009}$, où x et y sont des entiers.

M375. *Proposé par Neculai Stanciu, École Technique Supérieure de Saint Mucenic Sava, Berca, Roumanie.*

Déterminer toutes les solutions réelles du système d'équations

$$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} \;=\; 4\,; \qquad x^2 + y^2 + z^2 \;=\; 9\,; \qquad xyz \;=\; \frac{9}{2}\,.$$

....

M369. *Proposed by the Mayhem Staff.*

A rectangle has vertices $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$, and $D(0,4)$. A horizontal line is drawn through $P(4,3)$, meeting BC at M and AD at N. A vertical line is drawn through P, meeting AB at Q and CD at R. Prove that AP, DM, and BR all pass through the same point.

M370. *Proposed by the Mayhem Staff.*

(a) Prove that $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$ for all angles A and B.

(b) Prove that $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ for all angles C and D.

(c) Determine the exact value of $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$, without using a calculator.

M371. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Suppose that the line segment AB has length 3 and C is on AB with $AC = 2$. Equilateral triangles ACF and CBE are constructed on the same side of AB. If K is the midpoint of FC, determine the area of $\triangle AKE$.

M372. *Proposed by the Mayhem Staff.*

A real number x satisfies $x^3 = x + 1$. Determine integers a, b, and c so that $x^7 = ax^2 + bx + c$.

M373. *Proposed by Kunal Singh, student, Kendriya Vidyalaya School, Shillong, India.*

The side lengths of a triangle are three consecutive positive integers and the largest angle in the triangle is twice the smallest one. Determine the side lengths of the triangle.

M374. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Suppose that p is a fixed prime number with $p \geq 3$. Determine the number of solutions to $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{2009}$, where x and y are integers.

M375. *Proposed by Neculai Stanciu, Saint Mucenic Sava Technological High School, Berca, Romania.*

Determine all real solutions to the system of equations

$$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} = 4\,; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9\,; \qquad xyz = \frac{9}{2}\,.$$

Mayhem Solutions

M332. *Proposed by Dionne Bailey, Elsie Campbell, and Charles R. Diminnie, Angelo State University, San Angelo, TX, USA.*

A closed right circular cylinder has an integer radius and an integer height. The numerical value of the volume is four times the numerical value of its total surface area (including its top and bottom). Determine the smallest possible volume for the cylinder.

Solution by Cao Minh Quang, Nguyen Binh Khiem High School, Vinh Long, Vietnam.

Let r and h be the radius and the height of the closed right circular cylinder. The volume of such a cylinder is $V = \pi r^2 h$ and the surface area is $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

From the hypotheses, $\pi r^2 h = 4(2\pi r^2 + 2\pi rh)$, or $rh = 8r + 8h$, or $rh - 8r - 8h + 64 = 64$, or $(r - 8)(h - 8) = 64$. Note that $r - 8 > -8$ and $h - 8 > -8$. This gives us the following possibilities: